

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
БУРЯТИЯ**

**Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«БУРЯТСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНФОРМАЦИОННО –
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»
(ГБПОУ «БРИЭТ»)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ОУП.04 У «МАТЕМАТИКА»**

38.02.07 «БАНКОВСКОЕ ДЕЛО»

09.02.06. «СЕТЕВОЕ И СИСТЕМНОЕ АДМИНИСТРИРОВАНИЕ»,

10.02.01 «ОРГАНИЗАЦИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ»

09.01.03. «МАСТЕР ПО ОБРАБОТКЕ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ»

43.01.09. «ПОВАР, КОНДИТЕР»

Срок освоения ИПКРС:

специальность Банковское дело – 2 г. 10 мес.,

специальность Сетевое и системное администрирование – 3 г. 10 мес.,

специальность Организация и технология защиты информации – 3 г. 10 мес.,

профессия мастер по обработке цифровой информации – 2 г. 10 мес.

профессия повар, кондитер - 3 г. 10 мес.

Форма обучения – очная

Уровень образования при приеме на обучение – основное общее образование

Квалификация:

специалист банковского дела,

сетевой и системный администратор,

техник по защите информации,

оператор электронно-вычислительных и вычислительных машин,

повар – кондитер.

г. Улан-Удэ
2019 г.

Методические рекомендации по выполнению практических работ ОУП 04 У «Математика» разработаны на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (ФГОС СОО), утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года № 413 и Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (ФГОС СПО) с учетом получаемой специальности/профессии:

- специальность 38.02.07 «Банковское дело», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 05.02. 2018 года № 67,
- специальность 09.02.06 «Сетевое и системное администрирование», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 09.12. 2016 года № 1548,
- специальность 10.02.01 «Организация и технология защиты информации», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28.07. 2014 года № 805,
- профессия 09.01.03 «Мастер по обработке цифровой информации», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 02.08.2013 № 854,
- профессия 43.01.09 «Повар, кондитер», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 09.02.2016 года № 1569,

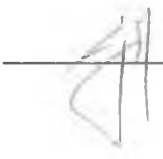
в соответствии с локальным актом П №024-2019 «Положение о разработке учебно- методической продукции», с рабочей программой учебного предмета Математика.

Организация-разработчик: Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение ««Бурятский республиканский информационно-экономический техникум»

Разработчик: Буянтуева Людмила Балдандоржиевна, преподаватель,
высшая

(фамилия, имя, отчество, должность, квалификационная категория (при наличии))

Методические рекомендации по выполнению
практических работ ОУП 04 У Математика
рассмотрен(а) на заседании МС
Протокол № 2 от «06» сентября 2019г.

Председатель МС  /Е.Д.Цыренов/

Аннотация

Данные методические рекомендации предназначены для студентов при выполнении практических работ по дисциплине/предмету «Математика».

Методические рекомендации предназначены для организации практических работ студентов в рамках реализации программ среднего профессионального образования.

В методических рекомендациях приведены темы практических работ, примерные задания и рациональные методы решения заданий, даны указания по их выполнению и определены формы контроля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
1. Методические рекомендации по выполнению практических работ	8
1.1. Перечень практических работ	8
1.2. Рекомендации по выполнению практических работ	9
1.3 Примерные задания и методы решения практических работ	11
2. Классификация ошибок	53
3. Критерии оценивания	54
4. Список рекомендованной литературы	56

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по выполнению практических работ представляют собой часть учебно-методического комплекта по учебной дисциплине/предмету Математика и соответствуют требованиям ФГОС и рабочей программе дисциплины/предмета.

Целью создания разработки является оказание помощи студентам первого курса в освоении учебного материала по дисциплине/предмету Математика.

Методические рекомендации разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов.

Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), материалы,

характеристики, порядок выполнения работы, таблицы, выводы (без формулировки), контрольные вопросы, рекомендована учебная литература.

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости студентов.

Цели практических занятий:

- помочь студентам систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;
- научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;
- научить их пользоваться справочной литературой и таблицами;
- формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате проведения практических работ подисциплине/предмету «Математика» студент должен:

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;
- широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

- Выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций;

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;

- находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным или квадратным уравнениям, а также аналогичные неравенства и системы;

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин; описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды.

1. Методические рекомендации по выполнению практических работ.

1.1. Перечень практических работ.

№	Тема	Наименование работы	Кол-во часов
1.	Развитие понятия о числе	Действия с приближенными значениями. Запись чисел в стандартном виде.	2
2.		Действия с комплексными числами.	2
3	Тригонометрические функции числового аргумента	Тригонометрические функции углового аргумента	2
4		Формулы приведения. Формулы сложения.	2
5		Формулы понижения степени.	2
6.	Преобразование тригонометрических выражений	Преобразование тригонометрических выражений.	2
7.	Решение тригонометрических уравнений и неравенств	Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений.	2
		Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.	2+2
8.	Корни, степени	Вычисление показательных и степенных выражений.	2
9.		Преобразование рациональных, иррациональных выражений.	2
10		Преобразование степенных и показательных выражений.	2
11.	Логарифмы	Логарифм числа.	2
12.		Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.	2
13.		Преобразование логарифмических выражений	2+2
14.	Функции, их свойства и графики	Область определения и множество значений, график функции.	2
15.		Исследование функции.	2
16.		Нахождение области определения и области значения функции. Построение графика функции.	2+2
17.	Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции	Преобразования графиков. Растяжение и сжатие вдоль осей координат.	2
18.	Последовательности и функции	Вычисление числовых последовательностей.	2
19.		Решение задач на геометрическую прогрессию.	2
20.		Вычисление предела функции.	2
21.	Дифференциальное исчисление	Вычисление производной сложной функции.	2+2
22.	Интегральное исчисление	Вычисление площади криволинейной трапеции.	2
23.	Уравнения и неравенства	Решение иррациональных уравнений и неравенств	2+2
24,25.		Решение показательных, логарифмических уравнений и неравенств.	2+2

26.	Прямые и плоскости в пространстве	Перпендикулярность прямой и плоскости.	2
27		Параллельность прямых, прямой и плоскости.	2
28.		Параллельность плоскостей	2
29,30.		Перпендикулярность прямой и плоскости	2+2
31,32		Перпендикуляр и наклонные.	2+2
33		Перпендикулярность плоскостей	2
34.	Многогранники	Сечения куба, призмы и пирамиды	2
35.		Решение задач по теме «Призма	2
36.		Решение задач по темам «Пирамида», «Усеченная пирамида»	2
37.	Тела и поверхности вращения	Решение задач по теме «Цилиндр»	2
38.		Решение задач по теме «Конус»	2
39		Решение задач по теме «Шар. Сфера»	2
40.	Измерения в геометрии	Вычисление объема призмы. Вычисление объема цилиндра.	2
41.		Вычисление объема шара, площади сферы	2
42		Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.	2
43.	Понятие вектора в пространстве	Линейные операции над векторами.	2
44.	Метод координат в пространстве	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	2
45,46.		Вычисление угла между векторами. Вычисление скалярного произведения векторов.	2+2
47.	Элементы математической статистики	Понятие о задачах математической статистики.	2

1.2. Рекомендации по выполнению практических работ.

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса

При самостоятельном решении поставленных задач нужно составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из сущности данной задачи.

В ходе практических работ студенты овладевают умениями работать с нормативными документами, справочниками, составляют чертежи, схемы, таблицы, техническую документацию и решают задачи (в соответствии с содержанием общеобразовательных общепрофессиональных и специальных дисциплин).

К каждой практической работе разрабатываются инструкции. Инструкции содержат методические рекомендации, а также конкретные практические задания. Расчеты студенты проводят по вариантам, что обеспечивает их самостоятельность в работе и позволяет преподавателю выявлять отстающих, проводить с ними индивидуальную работу.

Преподаватель осуществляет контроль за работой каждого студента, помогает тем из них, кто в этом нуждается, дает индивидуальные консультации.

В результате самостоятельного поэтапного решения предложенных заданий, студенты получают достаточно полное представление о практическом использовании изученного лекционного материала.

Практические работы студенты оформляют в отдельных тетрадях, пастой синего цвета.

1.3 Примерные задания и методы решения практических работ

Практическая работа №1 «Действия с приближенными значениями. Запись чисел в стандартном виде»

Пример 1.

В энциклопедии указано, что масса Земли равна $5,976 \cdot 10^{24}$ кг. Оценим абсолютную погрешность приближенного значения массы Земли.

Обозначим массу Земли (в кг) буквой m . Так как в множителе $5,976$ все цифры верные и последней цифрой является цифра тысячных, то $m = (5,976 \pm 0,001) \cdot 10^{24}$. Раскрыв скобки, будем иметь $m = 5,976 \cdot 10^{24} \pm 0,001 \cdot 10^{24}$ или $m = 5,976 \cdot 10^{24} \pm 10^{21}$. Эта запись означает, что абсолютная погрешность приближенного значения m меньше или равна 10^{21} . Если число записано в стандартном виде $a \cdot 10^n$ и в множителе a все цифры верные, то такая запись позволяет легко оценить также относительную погрешность.

Пример 2.

Оценим относительную погрешность приближенного значения массы Земли.

В примере 1 мы оценили абсолютную погрешность такого приближенного значения. Она меньше или равна 10^{21} . Значит, его относительная

погрешность не превосходит $\frac{10^{21}}{5,976 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{5976} < \frac{1}{1000}$. Видно, что относительная погрешность меньше единицы последнего разряда в записи множителя $5,976$.

Аналогично можно показать, что если $x \approx a \cdot 10^n$ (где $1 \leq a < 10$ и множитель a записан верными цифрами), то относительная погрешность приближенного значения не превосходит единицы разряда, в котором записана последняя из этих цифр.

Практическая работа №2 «Действия с комплексными числами»

Пример 1.

Выполнить действия над комплексными числами, представив

результат в алгебраической форме:

$$(2+3i) \cdot (3-i) =$$

Решение:

$$(2+3i)(3-i) = 6 - 2i + 9i - 3i^2 = 6 + 7i + 3 = 9 + 7i. (2+3i)(3-i) = 6 - 2i + 9i - 3i^2 = 6 + 7i + 3 = 9 + 7i.$$

Пример 2.

$$(2i-i^2)^2 + (1-3i)^3 =$$

Решение.

$$\begin{aligned} (2i-i^2)^2 + (1-3i)^3 &= (2i+1)^2 + 1 - 3(3i)^2 + 3(3i) - (3i)^3 = (2i-i^2)^2 + (1-3i)^3 = (2i+1)^2 + 1 - 3(3i)^2 + 3(3i) - (3i)^3 = \\ &= 4i^2 + 4i + 1 - 27i^2 + 9i - 27i^3 = -4 + 4i + 1 + 27 - 9i + 27i = 24 + 22i. = 4i^2 + 4i + 1 - 27i^2 + 9i - 27i^3 = -4 + 4i + 1 + 27 - 9i + 27i = 24 + 22i. \end{aligned}$$

Практическая работа №3 «Тригонометрические функции углового аргумента»

Пример 1. В прямоугольном треугольнике известна гипотенуза^c и острый угол^α. Найти катеты, площадь треугольника и радиус описанной окружности, если $c = 12$, $\alpha = 60^\circ$.

Решение:

Заметим, что $\triangle ABC$ полностью задан – известна гипотенуза и острый угол^α (рис. 2).

Мы можем вычислить любой элемент треугольника:

$$a = c \cdot \sin \alpha;$$

$$a = 12 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3};$$

$$b = c \cdot \cos \alpha;$$

$$b = c \cdot \cos 60^\circ = 6;$$

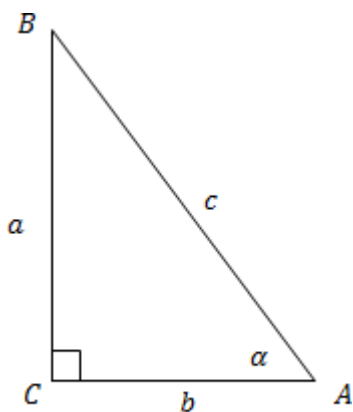


Рис. 2

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b = 18\sqrt{3};$$

Практическая работа №4 «Формулы приведения. Формулы сложения»

Пример: Выбрать формулу сложения для проверки формулы приведения следующего вида: $\sin (\pi/2+\alpha)=\cos \alpha$ $\sin (\pi/2+\alpha) = \cos \alpha$.

Решение:

Нам подойдет формула синуса суммы.

$$\begin{aligned}\text{Итого: } \sin(\pi/2 + \alpha) &= \sin \pi/2 \cdot \cos \alpha + \cos \pi/2 \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \\ \sin(\pi/2 + \alpha) &= \sin \pi/2 \cdot \cos \alpha + \cos \pi/2 \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha\end{aligned}$$

Ответ: $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$ $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$ - наша формула доказана.

Практическая работа №5 «Формулы понижения степени»

Пример.

Проверьте справедливость формулы понижения степени

вида $\cos^4 \alpha = \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$, взяв $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

Чтобы проверить справедливость указанной формулы понижения степени для данного значения угла α , нужно вычислить значения левой и правой частей и убедиться, что они равны.

Так как $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $4\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Известно,

что $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2\alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\cos 4\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (при

необходимости смотрите статью значения синуса, косинуса, тангенса и

$$\cos^4 \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{6} \right)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = \frac{9}{16}$$

котангенса, тогда

Таким образом, значения левой и правой частей формулы понижения

степени вида $\cos^4 \alpha = \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$ совпадают при $\alpha = \frac{\pi}{6}$, что подтверждает справедливость этой формулы для данного угла.

Практическая работа №6 «Преобразование тригонометрических выражений»

Пример.

Вычислите: $\frac{24}{\sin^2 39^\circ + \sin^2 129^\circ}$.

Решение.

Заметим, что в знаменателе данной дроби у синусов разные углы 39° и 129° .

Используем формулу приведения: $\sin^2 129^\circ = \sin^2(90^\circ + 39^\circ) = \cos^2 39^\circ$ и тогда

наше выражение примет вид: $\frac{24}{\sin^2 39^\circ + \cos^2 39^\circ}$, в знаменателе тригонометрическое тождество, равное 1. Нам осталось 24 разделить на 1, получаем 24.

Практическая работа №7

«Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств»

Пример.

Решить уравнение: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctgx} - 1$.

Решение.

Обе части уравнения легко представляются как выражение, зависящее только от $\operatorname{tg}x$:

$$\frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} = \frac{2}{\operatorname{tg}x} - 1.$$

Далее, заменой $\operatorname{tg}x = y$, тригонометрическое уравнение рационализуется:

$$\frac{y + 1}{y - 1} = \frac{2}{y} - 1.$$

В итоге $y = \frac{1}{2}$, т.е. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ и $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Однако можно заметить, что значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ также удовлетворяют исходному уравнению. Это потерянные корни. В чем причина?! В основе преобразований формулы, сужающие область

определения: $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

Практическая работа №8

«Вычисление показательных и степенных выражений»

Пример 1. Найдите значение выражения:

$$\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$$

$$\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}} = \frac{(7 \cdot 7)^{5,2}}{7^{8,4}} = \frac{7^{5,2} \cdot 7^{5,2}}{7^{8,4}} = \frac{7^{5,2+5,2}}{7^{8,4}} = \frac{7^{10,4}}{7^{8,4}} = 7^{10,4-8,4} = 7^2 = 49$$

Ответ: 49

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$\frac{a^2 b^{-6}}{(4a)^3 b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1} b^{-4}}$$

$$\frac{a^2 b^{-6}}{(4a)^3 b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1} b^{-4}} = \frac{16 a^2 b^{-6}}{4^3 a^3 b^{-2} a^{-1} b^{-4}} = \frac{16 a^2 b^{-6}}{64 \cdot a^{3+(-1)} \cdot b^{-2+(-4)}} =$$

$$= \frac{16 a^2 b^{-6}}{64 \cdot a^2 \cdot b^{-6}} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25

Практическая работа №9

«Преобразование рациональных, иррациональных выражений»

Пример.

Преобразуйте иррациональное выражение $9 + \sqrt[3]{3} - 2 + 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 1 - 2 \cdot \sqrt[3]{3}$.

Решение.

Для начала заменим корень из 81 его значением 9 (при необходимости смотрите извлечение корней), имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{81} + \sqrt[3]{3} - 2 + 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 1 - 2 \cdot \sqrt[3]{3} &= \\ = 9 + \sqrt[3]{3} - 2 + 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 1 - 2 \cdot \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Очевидно, в полученном выражении присутствуют подобные слагаемые, поэтому целесообразно выполнить их приведение:

$$\begin{aligned} 9 + \sqrt[3]{3} - 2 + 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 1 - 2 \cdot \sqrt[3]{3} &= \\ = (9 - 2 + 1) + (\sqrt[3]{3} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{3}) &= \\ = 8 + 3 \cdot \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Практическая работа №10

«Преобразование степенных и показательных выражений»

Пример 1.

Вычислите значение степенного выражения $2^3 \cdot (4^2 - 12)$.

Решение.

Согласно порядку выполнения действий сначала выполняем действия в скобках. Там, во-первых, заменяем степень 4^2 ее значением 16 (при необходимости смотрите возведение в степень), и во-вторых, вычисляем разность $16 - 12 = 4$. Имеем $2^3 \cdot (4^2 - 12) = 2^3 \cdot (16 - 12) = 2^3 \cdot 4$.

В полученном выражении заменяем степень 2^3 ее значением 8, после чего вычисляем произведение $8 \cdot 4 = 32$. Это и есть искомое значение.

Итак, $2^3 \cdot (4^2 - 12) = 2^3 \cdot (16 - 12) = 2^3 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$.

Пример 2.

Упростить выражения со степенями $3 \cdot a^4 \cdot b^{-7} - 1 + 2 \cdot a^4 \cdot b^{-7}$.

Решение.

Очевидно, что данное выражение содержит подобные слагаемые $3 \cdot a^4 \cdot b^{-7}$ и $2 \cdot a^4 \cdot b^{-7}$, и мы можем привести

их: $3 \cdot a^4 \cdot b^{-7} - 1 + 2 \cdot a^4 \cdot b^{-7} = 5 \cdot a^4 \cdot b^{-7} - 1$.

Практическая работа №11 «Логарифм числа»

Пример 1. Вычислить $\log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b = 7$

Решение. Перепишем данное выражение, используя свойство логарифма степени и логарифма произведения:

$$\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \log_a (ab) = \frac{1}{2} (\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} (1 + 7) = 4$$

Пример 2. Вычислить $\ln 2e^2 + \ln \frac{1}{2e}$

Решение. Преобразуем данное выражение, используя свойство суммы логарифмов и определение натурального логарифма:

$$\ln 2e^2 + \ln \frac{1}{2e} = \ln \left(2e^2 \cdot \frac{1}{2e} \right) = \ln e = 1$$

Практическая работа №12

«Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию»

Пример.

Вычислите:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0,5} - \frac{\lg 64 + \lg 0,5}{\lg 7 - \lg 14}$$

Решение

Разность логарифмов с одинаковым основанием – это логарифм частного, а сумма логарифмов с одинаковым основанием – логарифм произведения. А у нас в числителях и знаменателях стоят логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

Применяя эти свойства, получаем:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0,5} - \frac{\lg 64 + \lg 0,5}{\lg 7 - \lg 14} = \frac{\log_5 \frac{12}{4}}{\log_5 (18 \cdot 0,5)} - \frac{\lg (64 \cdot 0,5)}{\lg \frac{7}{14}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0,5}$$

Согласно формуле перехода к новому основанию $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$:

$$\frac{\log_5 3}{\log_5 9} = \log_9 3$$

$$\frac{\lg 32}{\lg 0,5} = \log_{0,5} 32$$

$$\text{Следовательно: } \frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0,5} = \log_9 3 - \log_{0,5} 32$$

Из основания логарифма показатель степени n выносится за знак логарифма

как $\frac{1}{n}$, а из подлогарифмического выражения – как n , то есть:

$$\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \log_3 3$$

$$\log_{0,5} 32 = \log_{2^{-1}} 2^5 = (-1) \cdot \log_2 2^5 = (-5) \cdot \log_2 2$$

$$\text{Следовательно: } \log_9 3 - \log_{0,5} 32 = \frac{1}{2} \log_3 3 - (-5) \cdot \log_2 2 = \frac{1}{2} + 5 = 5 \frac{1}{2}$$

Ответ: $5 \frac{1}{2}$.

Практическая работа №13

«Преобразование логарифмических выражений»

$$\frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}$$

Пример. Вычислите:

Решение. Заметим, что в показателе степени у нас стоит логарифм под знаком квадратного корня, поэтому основное логарифмическое тождество мы применить не можем.

Используем прием, который хорошо помогает, если мы имеем дело с произведением или частным логарифмов.

Пусть искомое выражение равно y :

$$y = \frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}}$$

Возьмем от обеих частей логарифм по основанию 5. (Могли бы взять логарифм по основанию 2 - в данном случае это не имеет значения)

$$\log_5 y = \log_5 \left(\frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}} \right)$$

Получим:

Преобразуем выражение в правой части равенства. Воспользуемся следующими свойствами логарифмов:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_5 \left(\frac{5^{\sqrt{\log_5 2}}}{2^{\sqrt{\log_2 5}}} \right) =$$

Получим:

$$\log_5 \left(5^{\sqrt{\log_5 2}} \right) - \log_5 \left(2^{\sqrt{\log_2 5}} \right) =$$

$$\sqrt{\log_5 2} \times \log_5 5 - \sqrt{\log_2 5} \times \log_5 2 =$$

$$\sqrt{\log_5 2} - \frac{\log_5 2}{\sqrt{\log_5 2}} =$$

$$\sqrt{\log_5 2} - \sqrt{\log_5 2} = 0$$

Итак,

$$\log_5 y = 0$$

Отсюда

$$y = 1$$

Ответ: 1

Практическая работа №14

«Область определения и множество значений, график функции»

Пример 1. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

Решение: в числителе ничего особенного нет, а вот знаменатель должен быть ненулевым. Давайте приравняем его к нулю и попытаемся найти «плохие» точки:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Данные значения

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

не входят в область определения функции. Действительно,

подставьте $x = -\sqrt{3}$ или $x = \sqrt{3}$ в функцию и вы увидите, что знаменатель обращается в ноль.

Пример 2. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+2x+5}$$

Решение: попытаемся найти точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Для этого решим **квадратное уравнение**:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 5 &= 0 \\D &= 4 - 20 = -16 < 0\end{aligned}$$

Дискриминант получился отрицательным, а значит, действительных корней нет, и наша функция определена на всей числовой оси.

Ответ: область определения: $D(f) = \mathbb{R}$

Практическая работа №15

«Исследование функции»

Пример. Провести полное исследование и построить график функции

$$y(x) = x^2 + 81 - x.$$

Решение.

1) Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$$1 - x = 0, \Rightarrow x = 1.$$

Исключаем единственную точку $x=1$ из области определения функции и получаем:

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем

односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точка $x=1$ является разрывом второго рода, прямая $x=1$ - вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy , для чего приравняем $x=0$:

$$y = \frac{0^2 + 8}{1 - 0} = 8$$

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0;8)$

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox , для чего положим $y=0$:

$$\frac{x^2 + 8}{1 - x} = 0 \rightarrow x^2 + 8 = 0$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что $x^2+8>0$ для любых x . Поэтому при $x \in (-\infty; 1)$ функция $y>0$ (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при $x \in (1; +\infty)$ функция $y<0$ (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

4) Функция не является ни четной, ни нечетной, так

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 8}{1 - (-x)} = \frac{x^2 + 8}{1 + x}; \quad y(-x) \neq y(x); \quad y(-x) \neq -y(x)$$

как:

5) Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

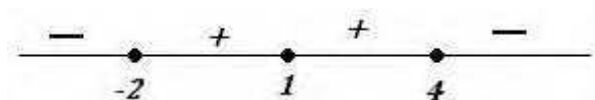
$$y' = \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x} \right)' = \frac{(x^2 + 8)'(1 - x) - (x^2 + 8)(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{2x(1 - x) - (x^2 + 8)(-1)}{(1 - x)^2} =$$

$$= \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 8}{(1 - x)^2} = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в

которых $y'=0$): $y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = -2; x = 4$

Получили три критические точки: $x=-2, x=1, x=4$. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При $x \in (-\infty; -2), (4; +\infty)$ производная $y' < 0$, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При $x \in (-2; 1), (1; 4)$ производная $y' > 0$, функция возрастает на данных промежутках.

При этом $x=-2$ - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), $x=4$ - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{1 - (-2)} = \frac{12}{3} = 4 \quad y(4) = \frac{4^2 + 8}{1 - 4} = \frac{24}{-3} = -8$$

Таким образом, точка минимума $(-2; 4)$, точка максимума $(4; -8)$.

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую

производную функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{x^2 - 2x - 8}{(1-x)^2} \right)' = -\frac{(x^2 - 2x - 8)'(1-x)^2 - (x^2 - 2x - 8)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} = \\ &= -\frac{(2x-2)(1-x)^2 - (x^2 - 2x - 8) \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = -\frac{(2x-2)(1-x) + 2(x^2 - 2x - 8)}{(1-x)^3} = \\ &= -\frac{2(-x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x - 8)}{(1-x)^3} = \frac{-2 \cdot (-9)}{(1-x)^3} = \frac{18}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \rightarrow \frac{18}{(1-x)^3} = 0$$

Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда $x \in (-\infty; 1)$ выполняется $y'' > 0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (1; +\infty)$ выполняется $y'' < 0$, то есть функция выпуклая.

Практическая работа №16

«Нахождение области определения и области значения функции. Построение графика функции»

Пример. Найти область определения и область значения функции

$$y = 4x/(3+x)$$

Решение.

1. Найдем $D(y)$ //т.е. какие значения может принимать x . для этого найдем ОДЗ (область допустимых значений дроби)

$$3+x \neq 0$$

$$x \neq -3$$

значит $D(y)$ данной функции $(-\infty; -3)$ и $(-3; +\infty)$ // всё множество действительных чисел, кроме -3 .

2. Найдем $E(y)$ //т.е. какие значения может принимать y , при всех возможных x

решаем уравнение вида $4x/(3+x)=A$, где $A \in E(y)$

$$(3+x)A=4x$$

$$3A=4x-xA$$

$$3A=x(4-A)$$

$$x=3A/(4-A)$$

значит $E(y)$ данной функции $(-\infty; 4)$ и $(4; +\infty)$ // всё множество действительных чисел, кроме 4.

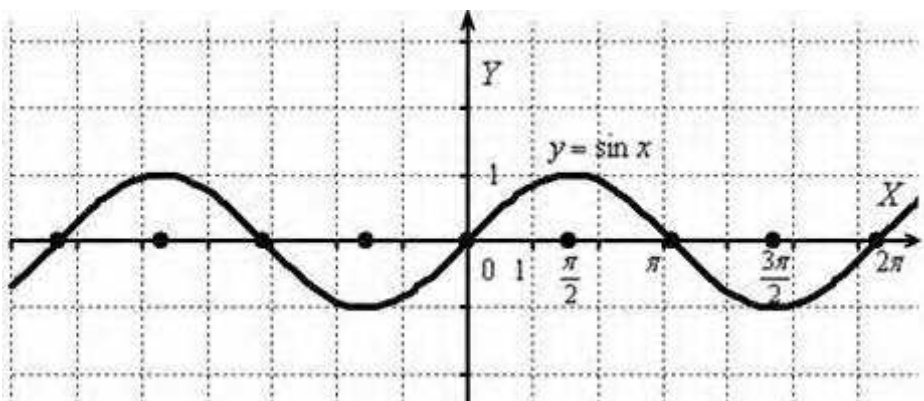
Практическая работа №17

«Преобразования графиков. Растяжение и сжатие вдоль осей координат»

Пример 1

Построить график функции $y = \sin 2x$.

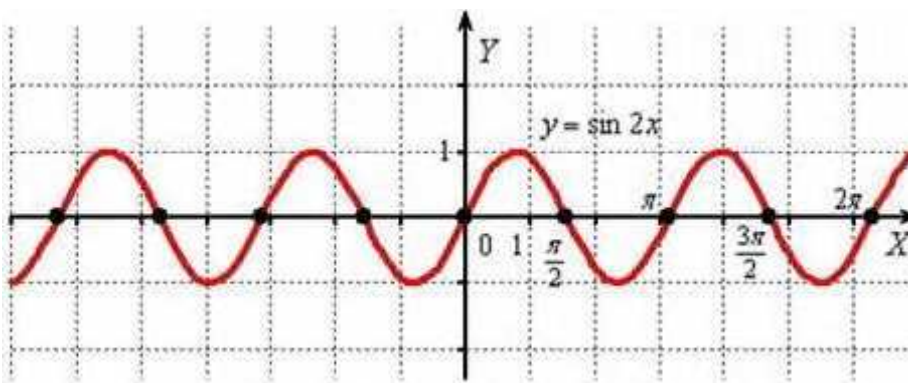
Сначала изобразим график синуса, его период равен $T = 2\pi$:



К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие

кропотливое, поскольку $\pi \approx 3,14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $2\pi \approx 6,28$ и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её к оси OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T = \pi$

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$$

Практическая работа №18

«Вычисление числовых последовательностей»

Пример. В числовой последовательности $y_1 = 1; y_2 = 1; y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, где $n = 3, 4, 5, \dots$, найти 7 член.

Решение

Для того чтобы найти 7 член данной последовательности, необходимо знать 5 и 6 член. В предыдущем примере мы нашли 3, 4 и 5 член, следовательно, можно найти 6, а далее и 7 член.

$$y_4 = 3; y_5 = 5; y_6 = 3 + 5 = 8; y_7 = 5 + 8 = 13$$

Ответ: $y_7 = 13$.

Практическая работа №19 «Решение задач на геометрическую прогрессию»

Пример 1. $1.(b_n)$ – геометрическая прогрессия;

$$q = \frac{1}{4}; b_3 = 2.$$

Найти: $b_5 + b_1$.

Решение:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2; 2 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2; b_1 = 32;$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{8};$$

$$b_5 + b_1 = 32\frac{1}{8}.$$

Ответ: $32\frac{1}{8}$.

Пример 2. (b_n) – геометрическая прогрессия,

$$b_1 = 0,5; b_4 = 4.$$

Найти: S_5 .

Решение:

$$b_4 = b_1 \cdot q^3; 4 = \frac{1}{2} \cdot q^3; q^3 = 8; q = 2;$$

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{0,5(2^5 - 1)}{2 - 1} = 15,5.$$

Ответ: 15,5.

Практическая работа №20

«Вычисление предела функции»

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$.

Решение. Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2 . Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Практическая работа №21

«Вычисление производной сложной функции»

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + \lg x + 15}$

Решение. Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать

корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' \end{aligned}$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}} \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \end{aligned}$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Практическая работа №22

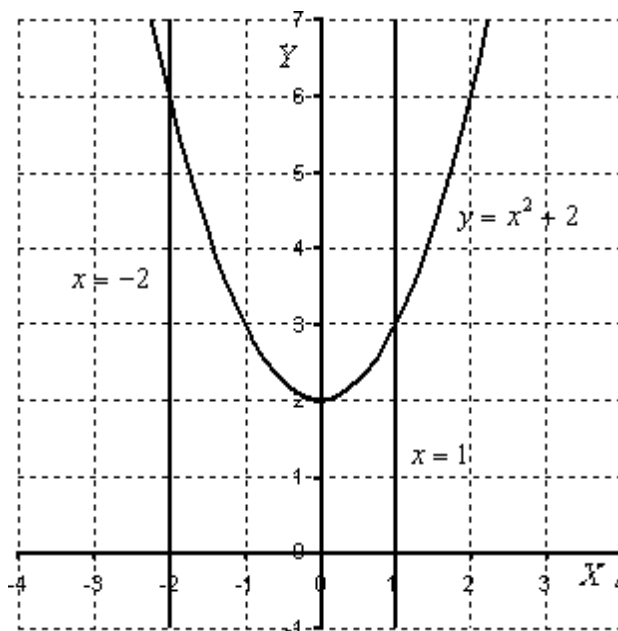
«Вычисление площади криволинейной трапеции»

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Решение. Это типовая формулировка задания. *Первый и важнейший момент решения – построение чертежа.* Причем, чертеж необходимо построить **ПРАВИЛЬНО**.

При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций. Там же можно найти очень полезный применительно к нашему уроку материал – как быстро построить параболу. В данной задаче решение может выглядеть так.

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение $y = 0$ задает ось OX):



Штриховать криволинейную трапецию я не буду, здесь очевидно, о какой площади идет речь. Решение продолжается так:

На отрезке $[-2; 1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** OX , поэтому:

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9 \text{ ед}^2$

Практическая работа №23

«Решение иррациональных уравнений и неравенств»

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x-1} = x-2$,

Решение.

$$\sqrt{2x-1} = x-2,$$

$$2x-1 = x^2-4x+4, \text{ Проверка:}$$

$$x^2-6x+5=0, x=5, \sqrt{2 \times 5-1} = 5-2,$$

$$x_1=5, 3=3$$

$$x_2=1 - \text{постор. корень } x=1, \sqrt{2 \times 1-1} \neq 1-2,$$

Ответ: 5 пост. к. 1 $\neq -1$.

Практическая работа №24, №25

«Решение показательных, логарифмических уравнений и неравенств»

Пример. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$.

Решение:

Разделим обе части уравнения на 25^x :

$$2 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^x - 5 = 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 = 0;$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = m$, $m > 0$, тогда

$$2m^2 - 3m - 5 = 0,$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{5}{2}; \\ m_2 = -1 \text{ не подходит, т.к. } m > 0; \end{cases}$$

Если $m = \frac{5}{2}$, то

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2},$$

$$x = -1.$$

Ответ: -1.

Практическая работа №26

«Перпендикулярность прямой и плоскости»

Пример. В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90° (рис.1).

Прямая BD перпендикулярна плоскости ABC . Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой AC .

Дано: В $\triangle ABC$ $\angle A + \angle B = 90^\circ$

$BD \perp ABC$

Доказать: $CD \perp AC$

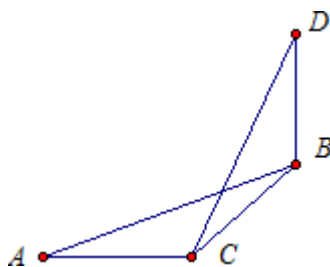


Рис. 1

Доказательство:

Так как $\angle A + \angle B = 90$, то $\angle ACB = 90^\circ$.

Итак, прямая AC перпендикулярна прямой BC , прямая AC перпендикулярна прямой BD , т.к. BD перпендикулярна по условию плоскости ABC . Значит, прямая AC перпендикулярна двум пересекающимся в точке B прямым из плоскости BCD .

Получаем, что прямая AC перпендикулярна плоскости BCD (по признаку), а значит, и прямой CD , так как $CD \subset BCD$, что и требовалось доказать.

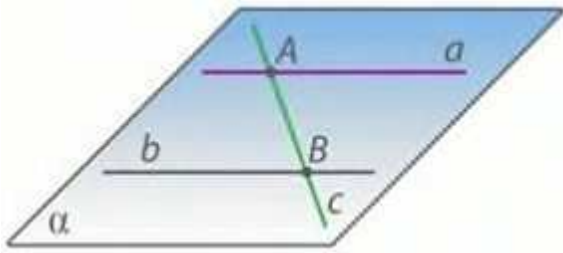
Практическая работа №27

«Параллельность прямых, прямой и плоскости»

Пример. Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α . Докажите, что прямая c , пересекающая прямые a и b , также лежит в плоскости α .

Дано: $a \parallel b$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $c \cap a = A$, $c \cap b = B$

Доказать: $c \in \alpha$



Доказательство:

Точка A прямой c , принадлежит и прямой a , а значит, и плоскости α . Точка B прямой c принадлежит прямой b , а значит, и плоскости α . Так как две точки прямой c принадлежат плоскости α , то и вся прямая лежит в плоскости α , в силу аксиомы A2.

Практическая работа №28

«Параллельность плоскостей»

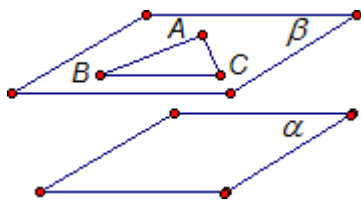
Пример. Две стороны треугольника параллельны плоскости α .

Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α .

Доказательство:

Дан треугольник ABC и плоскость α . Стороны AB и AC параллельны плоскости α (Рис. 7.). Докажем, что и сторона BC параллельна плоскости α . Через две пересекающиеся прямые AC и AB проходит плоскость β и притом только одна. Плоскость β параллельна плоскости α , так как

прямые AC и AB параллельны плоскости α (из задачи 2). Но прямая BC лежит в плоскости β , а значит BC параллельна плоскости α (из задачи 1).



Практическая работа №29, №30

«Перпендикулярность прямой и плоскости»

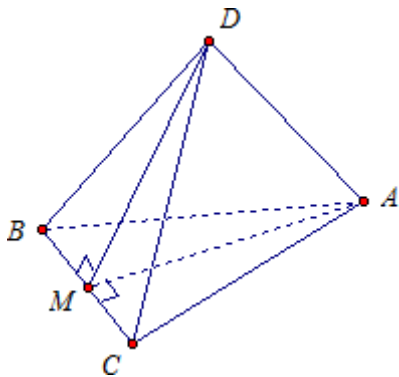
Пример. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC . Точка D равноудалена от концов отрезка BC , точка A также равноудалена от концов отрезка BC .

Дано: $D \notin ABC$,

$$DB = DC,$$

$$AB = AC$$

Доказать: $BC \perp AD$



Доказательство:

Пусть M – середина отрезка BC . Треугольник ABC – равнобедренный, так как $AB = AC$. Тогда медиана AM является и высотой, то есть $AM \perp BC$.

Треугольник DBC – равнобедренный, так как $DB = DC$. Тогда медиана DM является и высотой, то есть $DM \perp BC$.

Прямая ВС перпендикулярна двум пересекающимся прямым DM и AM из плоскости DMA, а значит, прямая ВС перпендикулярна прямой DA, которая лежит в плоскости DMA, что и требовалось доказать.

Практическая работа №31, №32

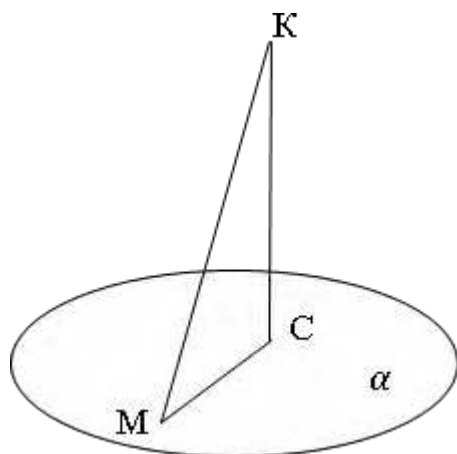
«Перпендикуляр и наклонные»

Пример 1.

Из точки К, на расстоянии 9 см, к плоскости α опущен перпендикуляр КС и проведена наклонная КМ, равная 15 см.

Найти проекцию наклонной. (Устно, менять условие, найти наклонную, найти перпендикуляр)

Решение:



Рассмотрим прямоугольный треугольник KCM:
(КС-перпендикуляр, по условию), по теореме
Пифагора:

$$MC^2 = MK^2 - KC^2$$

$$MC = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

Ответ: Проекция наклонной MC=12 см.

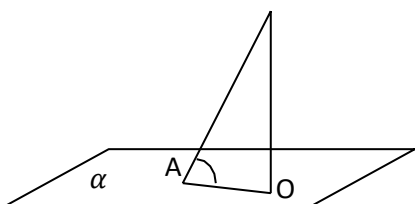
Пример 2.

К плоскости α проведена наклонная АВ ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 8 см, наклонная с плоскостью образует угол 60° . Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка В.

Решение:

В

Рассмотрим треугольник ABO: прямоугольный, BO-



расстояние от точки В до плоскости α ,
перпендикулярно АО. Следовательно угол В=30°, а АО =4
см, как катет лежащий против угла в 30°.

По теореме Пифагора:

$$BO^2 = AB^2 - AO^2$$

$$BO^2 = 8^2 - 4^2$$

$$BO = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Практическая работа №33

«Перпендикулярность плоскостей»

Пример. Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного 120°.

Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла.

Найдите отрезок CD , если $AB = AC = BD = a$.

Дано: $\angle CABD = 120^\circ$,

$AC \perp AB$, $AC \subset \alpha$,

$BD \perp AB$, $BD \subset \beta$,

$AB = AC = BD = a$.

Найти: CD .

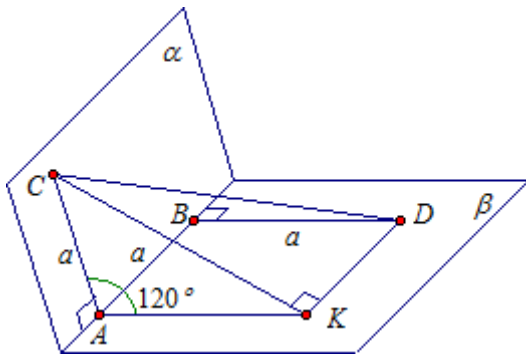


Рис. 2

Решение:

Здесь дан тупой двугранный угол, $\angle CABD = 120^\circ$.

AB – ребро двугранного угла, точка C лежит в одной полуплоскости, точка D лежит в другой полуплоскости. В одной полуплоскости проведена прямая AC , перпендикулярная AB . В другой полуплоскости проведена прямая BD , перпендикулярная AB .

Проведем AK перпендикулярно AB и DK параллельно AB (рис. 2). Тогда угол CAK – линейный угол двугранного угла, а значит, $\angle CAK = 120^\circ$.

Так как прямые AK и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB , то прямые AK и BD – параллельны.

В четырехугольнике $AKDB$ противоположные стороны параллельны ($AK \parallel BD$, $AB \parallel DK$), значит, $AKBD$ – параллелограмм. Значит, $AK = BD = a$.

Рассмотрим треугольник AKC . Найдем CK^2 с помощью теоремы косинусов:

$$CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2 \cdot AC \cdot AK \cdot \cos \angle CAK = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Прямая AB перпендикулярна плоскости линейного угла (по свойству 1), значит, и параллельная ей прямая DK перпендикулярна плоскости линейного угла. А значит, прямая DK перпендикулярна прямой CK , лежащей в плоскости линейного угла, то есть угол CKD прямой.

Из прямоугольного треугольника CKD по теореме Пифагора находим гипотенузу CD .

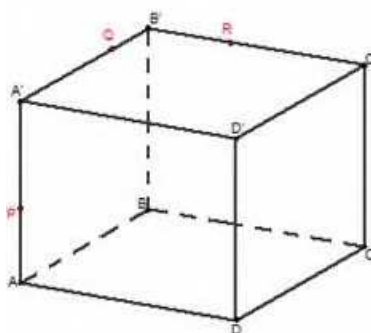
$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

Ответ: $2a$.

Практическая работа №34

«Сечения куба, призмы и пирамиды»

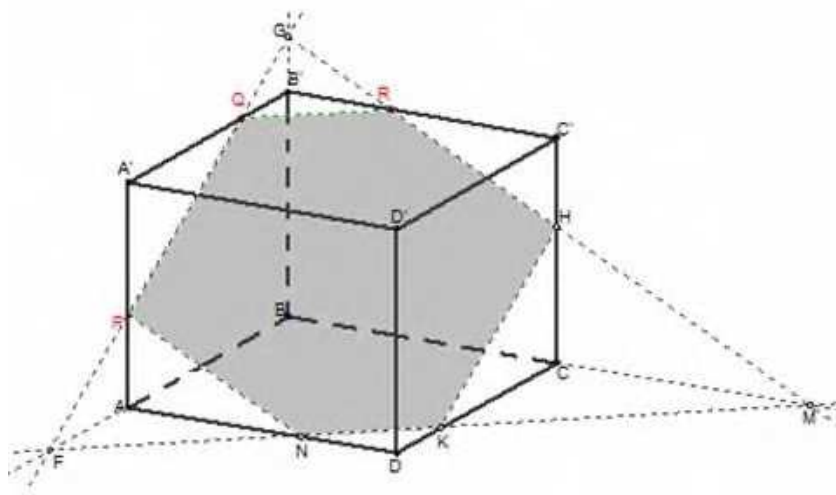
Пример. Построить сечение (PQR) параллелепипеда. Все точки лежат на



ребрах двух смежных граней.

Построение:

- 1) Строим PQ и QR ;
- 2) $PQ \cap BA = F$, $PQ \cap BB' = G$;
- 3) $GR \cap CC' = H$, $GR \cap BC = M$;
- 4) $FM \cap AD = N$, $FM \cap DC = K$;
- 5) $PQRHKN$ — искомое сечение.



Практическая работа №35

«Решение задач по теме «Призма»»

Пример. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 21 см и 9 см и высотой 8 см (рис. 3). Найдите площадь боковой поверхности, если боковое ребро равно 10 см.

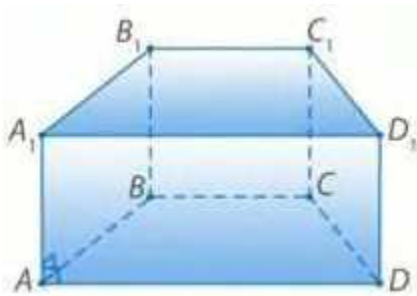


Рис. 3

Дано: $AD \parallel BC$, $AB = CD$,
 $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BH = 8$ см,
 $AA_1 \perp ABC$, $AA_1 = 10$ см. (рис. 4)

Найти: $S_{\text{бок}}$

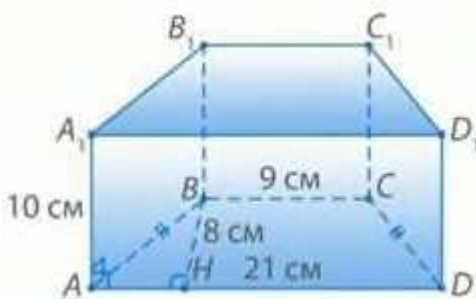


Рис. 4

Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 5). BH и CG – высоты трапеции. $AD = 21$ см, $BC = 9$ см. Так как трапеция $ABCD$ равнобокая, то $HG = BC = 9$ см, $AH = GD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{21 - 9}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см).

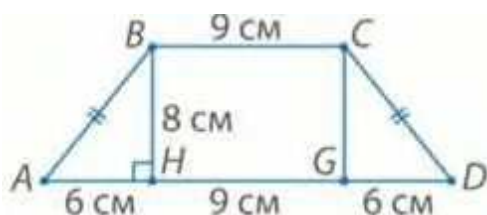


Рис. 5

Рассмотрим треугольник $\triangle ABH$ и найдем сторону AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Найдем периметр основания.

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 10 + 9 + 10 + 21 = 50 \text{ (см)}.$$

Применяем формулу для площади боковой поверхности:

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h = P_{ABCD} \cdot AA_1 = 50 \cdot 10 = 500 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 500 см²

Практическая работа №36

«Решение задач по темам «Пирамида», «Усеченная пирамида»

Пример. Основанием пирамиды является квадрат $ABCD$ со стороной 4 см, высота – отрезок $AM = 3 \text{ см}$. найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

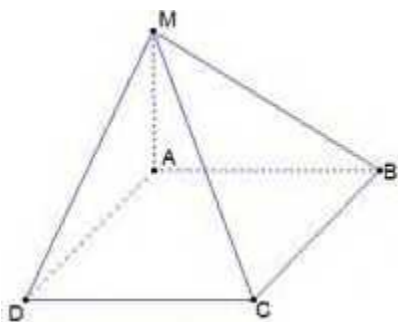


Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1

$MA \perp ABC$. Прямоугольные треугольники MAB и MAD равны по двум катетам, отсюда $MB = MD$. Треугольники MCD и MCB равны по трем сторонам. Отсюда:

$$S_{б.п.} = 2S_{MAD} + 2S_{MCD}$$

AD – проекция прямой MD на плоскость ABC , $AD \perp DC \Rightarrow MD \perp DC$, отсюда имеем прямоугольный треугольник MDC .

В прямоугольном треугольнике MAD найдем по теореме Пифагора гипотенузу:

$$MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Найдем площадь рассматриваемого прямоугольного треугольника:

$$S_{MAD} = \frac{1}{2} MA * AD = 6$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник MDC и найдем его площадь:

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} MD * DC = 10$$

Ответ:

$$S_{\text{б.п.}} = 2S_{MAD} + 2S_{MCD} = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Практическая работа №37

«Решение задач по теме «Цилиндр»

Пример. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания – 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно его оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от оси до плоскости этого сечения. (См. Рис. 8.)

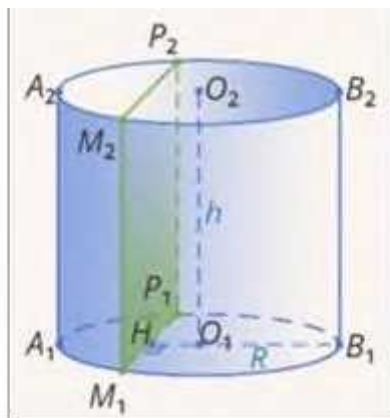


Рис. 8. Цилиндр, иллюстрирующий условие

Решение.

Для начала поймем, что надо найти. Искомое расстояние – перпендикуляр из центра основания на хорду, отсекаемую в основании. Докажем это. Во-первых, данный отрезок перпендикулярен оси (а по определению расстояния, искомый отрезок должен быть перпендикулярен и оси, и плоскости сечения). Во-вторых, он перпендикулярен хорде и образующей, лежащим в плоскости

сечения, а тогда, по признаку, он перпендикулярен всей плоскости. Итак, что найти – поняли.

Очевидно, одна из сторон квадрата равна высоте, т. е. оси, а значит, и вторая равна ей же. Таким образом, сечение отсекает от основания хорду длиной 8 см.

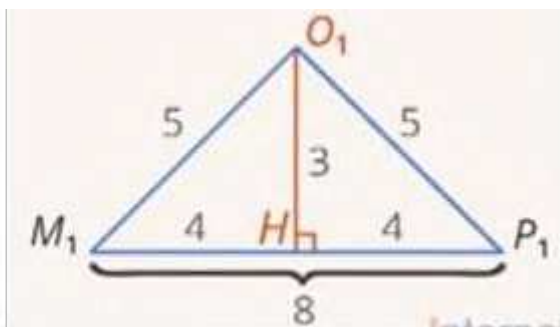


Рис. 9. Выносной рисунок фигуры в нижнем основании

Сделаем отдельный рисунок окружности нижнего основания. (См. Рис. 9.)

Радиус окружности – 5, хорда длины – 8, нужно найти расстояние от радиуса до хорды. Очевидно, это просто высота равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основой 8. Найти ее несложно: она же является и медианой, значит, делит хорду на 4 и 4.

Так что искомое расстояние равно 3 по теореме Пифагора (или из того, что треугольник египетский).

Ответ: 3 см.

Практическая работа №38

«Решение задач по теме «Конус»

Пример. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади его основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания. Ответ дайте в градусах

Решение

$$S_{\text{бп}} = \pi Rl; S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

Значит, $l : R = 2$.

Теперь рассмотрим осевое сечение, проведем высоту (ось). Получим прямоугольный треугольник, в котором катет (радиус основания) вдвое меньше гипотенузы, значит, угол при радиусе равен 60 градусам (см. рис.).

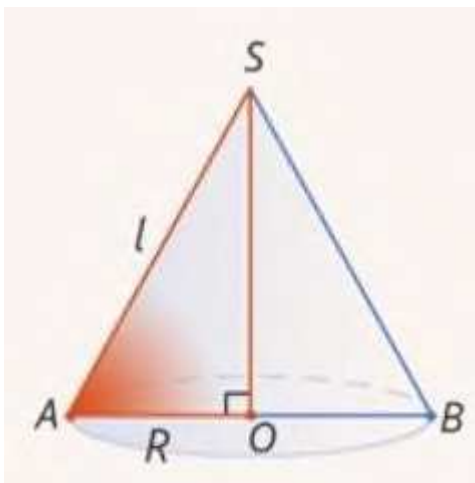


Рис. Иллюстрация к задаче

Ответ: 60 градусов.

Практическая работа №39

«Решение задач по теме «Шар. Сфера»

Пример. Стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости ABC , если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см

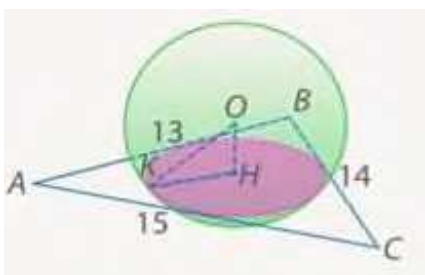


Рис. Иллюстрация к задаче

Решение

Зная радиус сферы, нужно найти расстояние от центра до плоскости. Для этого достаточно найти радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью. Тогда из прямоугольного треугольника ONK , где O — центр

сферы, H – центр окружности сечения, K – точка на этой окружности) мы сможем найти искомое расстояние.

Найдем радиус окружности сечения. Она является вписанной для

треугольника ABC . Воспользуемся формулой: $S = pr$. Тогда $r = \frac{S}{p}$;

$$p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ (см)} - \text{полупериметр.}$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Соответственно: } r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4 \text{ (см).}$$

Найдем расстояние от центра сферы до плоскости.

Искомое расстояние – это катет треугольника OKH с гипотенузой 5 и другим катетом 4. Тогда легко показать, что $OH = 3 \text{ см}$.

Ответ: расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно 3 см.

Практическая работа №40

«Вычисление объема призмы. Вычисление объема цилиндра»

Пример.

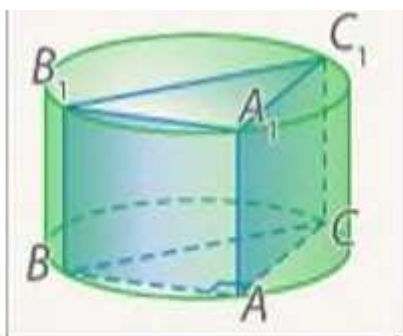


Рис. 7. Призма, вписанная в цилиндр

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с

катетами 6 и 8 . Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объемы призмы и цилиндра, описанного около этой призмы. (См. рис. 7.)

Решение. Объем призмы находится сразу (см. рис. 8).

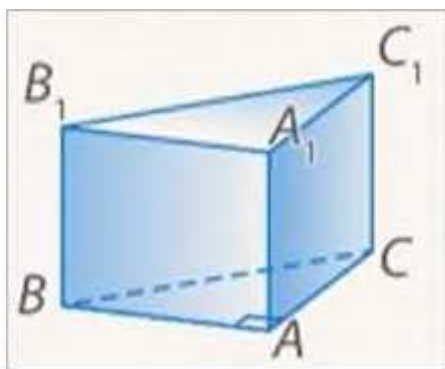


Рис. 8. Призма, данная по условию

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot AA_1 = 24 \cdot \frac{5}{\pi} = \frac{120}{\pi}.$$

Для того чтобы найти объем цилиндра, необходимо знать радиус его основания. Если цилиндр описан около призмы, то его радиусом будет радиус окружности, описанной около основания призмы. Основанием призмы является прямоугольный треугольник, тогда радиус окружности, описанной около него, будет равен половине гипотенузы.

По теореме Пифагора гипотенуза основания $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$,

а тогда радиус описанной окружности равен $R = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ – это и есть радиус основания цилиндра. Высота у него такая же, как и у призмы.

Имеем: $V_{\text{цвл}} = \pi r^2 h = 25\pi \cdot \frac{5}{\pi} = 125$.

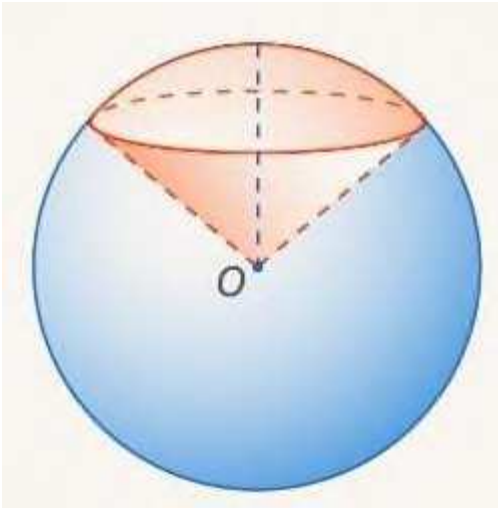
Ответ: $V_{\text{призмы}} = \frac{120}{\pi}$; $V_{\text{цвл}} = 125$.

Практическая работа №41

«Вычисление объема шара, площади сферы»

Пример. Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего сектор, составляет треть диаметра шара.

Решение:



Шаровой сектор — это часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента и конической поверхностью, основанием которой служит основание сегмента, а вершиной — центр шара. Формула объема шарового сектора: $V = (2/3) \cdot \pi R^2 \cdot h$, где h - высота сегмента. В нашем случае $R = H + h$, где H - высота конуса, а h - высота сегмента. Тогда $h = R - H = 6 - 4 = 2$, так как $H = (1/3) \cdot 2 \cdot R$ (дано). Значит $V = (2/3) \cdot \pi \cdot 36 \cdot 2 = 48\pi$.
Ответ: объем шарового сектора равен 48π

Практическая работа №42

«Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел»

Пример. Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды ?

Решение. Поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$$(h / 10)^3 = 4 / 0.5, \text{ то есть } h^3 = 8 \cdot 10^3, \text{ откуда } h = 20 \text{ см;}$$

аналогично, для диаметра d получим:

$$(d/8)^3 = 4/0.5, \text{ то есть } d^3 = 8 \cdot 8^3, \text{ откуда } d = 16 \text{ см.}$$

Практическая работа №43

«Линейные операции над векторами»

Пример 1.

Даны векторы $A = (-2; 3; 5)$ и $B = (4; -1; 7)$. Найти координаты вектора $3A - 2B$.

Указание

При умножении вектора на число все его координаты

Умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

Решение

$$3A = (-6; 9; 15), -2B = (-8; 2; -14).$$

$$3A - 2B = 3A + (-2B) = (-6 - 8; 9 + 2; 15 - 14) = (-14; 11; 1).$$

Ответ: $3A - 2B = (-14; 11; 1)$.

Пример 2.

При каких A и B векторы $A = (A; 3; -5)$ и $B = (1; -2; B)$ коллинеарны?

Указание

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Решение

Если $A \parallel B$, то $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta}$. Отсюда:

$$1) \quad \frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \quad 2) \quad \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{10}{3}$.

Практическая работа №44

«Угол между векторами. Скалярное произведение векторов»

Пример 1.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$. В данном случае:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\vec{a}\vec{b} = 5\sqrt{3}$.

Пример 2.

Найти длину вектора $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение будет следующим:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |-\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(-\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 6 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) + 9 \cdot |\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

1) Поставляем выражение вектора $\vec{c}$.

2) Используем формулу длины: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2}$, при этом в качестве вектора «вз» у нас выступает целое выражение $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

3) Используем школьную формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Обратите внимание, как она здесь любопытно

работает: $(-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = (-\vec{a})^2 + 2 \cdot (-\vec{a}) \cdot 3\vec{b} + (3\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2$ – фактически это

квадрат разности, и, по сути, так оно и есть. Желающие могут переставить

векторы местами: $\sqrt{(-\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{(3\vec{b} - \vec{a})^2} = \sqrt{9\vec{b}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2}$ – получилось то же самое с точностью до перестановки слагаемых.

4) Дальнейшее уже знакомо из двух предыдущих задач.

Ответ: $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5,20$ ед.

Практическая работа №45, №46

«Вычисление угла между векторами. Вычисление скалярного произведения векторов»

Пример 1.

Найти длину вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Решение. Угол между векторами. Снова посмотрим на нашу

формулу $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части:

$$\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

А части поменяем местами:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ – это число? Число. Длины векторов $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ –

числа? Числа. Значит, дробь $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ тоже является некоторым числом X . А

если известен косинус угла: $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = X$, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos X$.

Пример 2.

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a}\vec{b} = 8$.

Решение: Используем формулу:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

На заключительном этапе вычислений использован технический приём – устранение иррациональности в знаменателе. В целях устранения иррациональности я домножил числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$.

Итак, если $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Значения обратных тригонометрических функций можно находить по **тригонометрической таблице**. Хотя случается это редко. В задачах аналитической геометрии значительно чаще появляется какой-нибудь

неповоротливый медведь вроде $\arccos \frac{5}{17}$, и значение угла приходится находить приближенно, используя калькулятор. Собственно, такую картину мы ещё неоднократно увидим.

Ответ: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4} \text{ рад.} = 45^\circ$

Практическая работа №47

«Понятие о задачах математической статистики»

Пример 1. Пусть ученик получил в течение года следующие отметки по математике: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5. Какую четвертную отметку поставит ему учитель?

Решение. Многих школьников волнует подобная проблема, и чаще всего ученики решают ее следующим естественным образом: складывают все отметки и делят сумму оценок на их количество.

В нашем случае $(5 + 2 + 4 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5) / 10 = 4,4$

Число 4,4, которое получается в результате, называется **средним арифметическим**. Поскольку такую оценку в журнал ставить не принято, учитель, скорее всего, округлит ее до 4.

Пример 5. Дан числовой ряд, который представляет собой стоимость одного литра бензина на 10 автозаправочных станциях (в рублях):

32,2; 32,8; 33; 32,9; 33; 32,5; 32,8; 33; 33,2; 32,8.

Решение.

Найдем среднее арифметическое этих цен:

$$(32,2 + 32,8 + 33 + 32,9 + 33 + 32,5 + 32,8 + 33 + 33,2 + 32,8) / 10 = 32,82.$$

Самым естественным, на первый взгляд, кажется посчитать отклонение от среднего для каждого члена ряда и затем найти их среднее арифметическое:

$$((32,2 - 32,82) + (32,8 - 32,82) + (33 - 32,82) + \dots + (32,8 - 32,82)) / 10 = 0.$$

Мы получили нуль совсем не случайно: при вычислении «среднего разброса» по такой формуле часть отклонений входит в сумму со знаком «плюс», часть — со знаком «минус», а в сумме всегда получается нуль.

Какой же выход? Можно суммировать, например, модули отклонений — тогда уж нуля точно не будет. Иногда так и поступают, но с модулем не всегда удобно работать. Поэтому математики решили, что лучше складывать не модули отклонений, а их квадраты — они ведь тоже неотрицательные.

Так появилось понятие **дисперсии числового ряда**.

Дисперсией числового ряда называется среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего арифметического.

$$D = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Найдем дисперсию числового ряда из нашего примера с ценами на бензин.

Среднее арифметическое мы уже вычислили — оно равно 32,82.

Найдем теперь дисперсию, т. е. **среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего:**

$$((32,2 - 32,82)^2 + (32,8 - 32,82)^2 + (33 - 32,82)^2 + \dots + (32,8 - 32,82)^2) / 10 = 0,0736.$$

3. Классификация ошибок

Грубыми считаются ошибки:

- незнание определения основных понятий, законов, правил, основных положений теории, незнание формул, общепринятых символов обозначений величин, единиц их измерения;
- незнание наименований единиц измерения;
- неумение выделить в ответе главное;
- неумение применять знания, алгоритмы для решения задач;
- неумение делать выводы и обобщения;
- неумение читать и строить графики;
- неумение пользоваться первоисточниками, учебником и справочниками;
- потеря корня или сохранение постороннего корня;
- отбрасывание без объяснений одного из них;
- равнозначные им ошибки;
- вычислительные ошибки, если они не являются опиской;
- логические ошибки.

К негрубым ошибкам следует отнести:

- неточность формулировок, определений, понятий, теорий, вызванная неполнотой охвата основных признаков определяемого понятия или заменой одного — двух из этих признаков второстепенными;
- неточность графика;
- нерациональный метод решения задачи или недостаточно продуманный план ответа (нарушение логики, подмена отдельных основных вопросов второстепенными);
- нерациональные методы работы со справочной и другой литературой;
- неумение решать задачи, выполнять задания в общем виде.

Недочетами являются:

- нерациональные приемы вычислений и преобразований;
- небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

Выделенные требования, за какие умения можно ставить определенную оценку и четкое представление, что считается грубой ошибкой, а что недочетом, позволят преподавателю грамотно оценить студента.

4. Критерии оценки

Оценки за выполнение работ являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине Математика.

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет

обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

4. Список литературы

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования М.И Башмаков. – 10-е изд., стер. - М.: Академия, 2017 г. – 256 с.
2. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. Образования/ М.И Башмаков. – М.: Академия, 2017 г.
3. Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. Проф. Образования/ М.И Башмаков. – изд., стер. - М.: Академия, 2018 г.
4. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень); под ред. А.Г. Мордковича – М.: Мнемозина, 2009.
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) – М.: Мнемозина, 2013.
6. Атанасян Л.С. Геометрия 10-11 кл. М., Просвещение, 2013.
7. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И Башмаков. – 10-е изд., стер. - М.: Академия, 2015 г. – 256 с. (Электронно-библиотечная система (ЭБС) Академия г. Москва).

<https://academia-moscow.ru/reader/?id=165141>

8. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие / М.И.Башмаков. – 5-е изд., стер. - М.: Академия, 2014.- 416 с. (Электронно-библиотечная система (ЭБС) Академия г. Москва).

<https://academia-moscow.ru/reader/?id=94461>

9.Башмаков, М.И. Математика : учебник / Башмаков М.И. — Москва : КноРус, 2019. — 394 с. — (СПО). — ISBN 978-5-406-06554-9. — URL: <https://book.ru/book/929528>

Дополнительная литература

Раздел ЭБС «ЮРАЙТ» Легендарные книги – «Математика» (16 экз)

<https://biblio-online.ru/catalog/legendary/matematika-statistika-i-mehanika/matematika>

Интернет- ресурсы:

[www. fcior. edu. ru](http://www.fcior.edu.ru) (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).

[www. school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

Для преподавателя:

Башмаков М.И. Математика: кн. для преподавателя: метод. пособие. — М., 2013
Башмаков М.И.,

Дополнительные источники для учителя:

Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 -11 кл. Методическое пособие для учителя. М.Мнемозина, 2011.- 171с.

Глизбург В.И. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Контрольные работы (под ред. А.Г.Мордковича) М.Мнемозина, 2011.- 35с.

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП

Сертификат 603332450510203670830559428146817986133868575882

Владелец Цыренов Евгений Данзанович

Действителен с 25.02.2021 по 25.02.2022