Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение

«Волховский политехнический техникум»

О. В. Калиновская

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методическое пособие

для студентов 1 курса

Волховского
политехнического
техникума

Волхов 2020

РАССМОТРЕНО:	УТВЕРЖДЕНО:
на заседании	приказом №____
цикловой комиссии.	от
Протокол №_________	«_____» апреля 2020г.
от«__»_________2020г.	
Председатель ЦК:___________	
Хлынцева Н.А.	

Автор: О. В. Калиновская

В методическом пособии изложены первоначальные теоретические сведения по теме «Комплексные числа». Рассмотрены алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел, действия над комплексными числами, заданными в разных формах, формулы перевода комплексных чисел из одной формы в другую. Изложение материала сопровождается подробными комментариями и многочисленными примерами. Разобраны примеры. Имеются задачи для самостоятельного решения. Предназначено для студентов 1 курса Волховского политехнического техникума, является одним из разделов учебного предмета «Математика».

Содержание.

Пояснительная записка.

Методическое пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебного предмета «Математика», федеральными государственными стандартами.

В методическом пособии изложены первоначальные теоретические сведения по теме «Комплексные числа». Рассмотрены алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел, действия над комплексными числами, заданными в разных формах, формулы перевода комплексных чисел из одной формы в другую. Изложение материала сопровождается подробными комментариями и многочисленными примерами. Разобраны примеры. Имеются задачи для самостоятельного решения.

Методическое пособие может быть использовано для первичного ознакомления с изучаемым материалом, при конспектировании лекций, для подготовки к практическим занятиям, для закрепления полученных знаний, умений и навыков. Кроме того, методическое пособие будет полезно и студентам старших курсов как справочное пособие, позволяющие быстро восстановить в памяти то, что было изучено ранее.

Предназначено для студентов 1 курса Волховского политехнического техникума, является одним из разделов учебного предмета «Математика».

Комплексные числа.

1. Основные понятия.

В процессе изучения математики происходит последовательное знакомство с числами. Так как сначала рассматривается множество N натуральных чисел, затем множество Z целых чисел, множество Q рациональных чисел и, наконец, множество R действительных чисел.

Часто возникают ситуации, когда не существует решений уравнения на множестве действительных чисел. Так, на множестве R не имеет решений квадратное уравнение $x^2+1=0$. Следовательно, возникает необходимость введения такого вида чисел, который расширяет множество действительных чисел. С этой целью ознакомимся с множеством мнимых чисел, а затем с комплексными числами.

Понятие мнимого числа.

Определение: Число, квадрат которого равняется -1, называется *мнимой единицей.*

Мнимая единица обозначается символом i. Как следует из определения мнимая единица удовлетворяет условию

$$i^2=-1. \qquad (1.1)$$

Определение: Числа, которые имеют вид bi, где b - вещественное число, называются *мнимыми числами.*

Например, числа: $5i$; $\frac{1}{6}i$ являются мнимыми.

Между мнимыми и действительными числами существует взаимно однозначное соответствие, поскольку каждому действительному числу b может быть поставлено в соответствие одно мнимое число bi.

Определение: Два мнимых числа b_1i и b_2i называются *равными между собой*, если $b_1=b_2$.

Определение: Мнимое число $-bi$ называется *противоположным* мнимому числу bi.

Например: число $5i$ является противоположным числу $-5i$.

Теорема: Любая натуральная степень числа i равняется одному из чисел 1; i; -1; $-i$.

Понятие комплексного числа.

Определение: Комплексным числом называется число вида $a+bi$, где a,b - действительные числа, i - мнимая единица. Число a называется действительной частью комплексного числа, число b - его мнимой частью.

Комплексные числа обычно обозначают одной буквой, чаще всего используют букву z:

$$z=a+bi \qquad (1.2)$$

Символически действительную и мнимую части комплексного числа z

обозначают так: a - абсцисса комплексного числа $(\operatorname{Re} z)$; b - мнимая часть комплексного числа $(\operatorname{Im} z)$.

Определение: Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел a и b.

Комплексное число в таком случае символически обозначается $z=(a;b)$.

Определение: Два комплексных числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ *называются равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $a=c$, $b=d$.

Для комплексных чисел не существует понятий «больше» или «меньше», то есть комплексные числа не сравнимы между собой.

Определение: Комплексное число $-a-bi$ называется *противоположным* комплексному числу $a+bi$.

Определение: Два комплексных числа, у которых действительные части являются равными между собой, а мнимые части являются противоположными друг другу, называются *комплексно-сопряженными* числами и обозначаются соответственно как $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$.

Определение: Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется неотрицательное число $r=|z|$, определяемое формулой $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Модуль любого комплексного числа определяется однозначно. Комплексно-сопряженные числа имеют равные модули

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\,;\ |\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|.$$

Следовательно, $$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (1.3)$$

$$|z|=\bar{z} \qquad (1.4)$$

Формы представления комплексных чисел:

- алгебраическая $z=a+bi$;
- геометрическая $z=(x;y)$;
- тригонометрическая $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;
- показательная $z=|z|\cdot e^{i\varphi}$.

Геометрическое изображение мнимых и комплексных чисел.

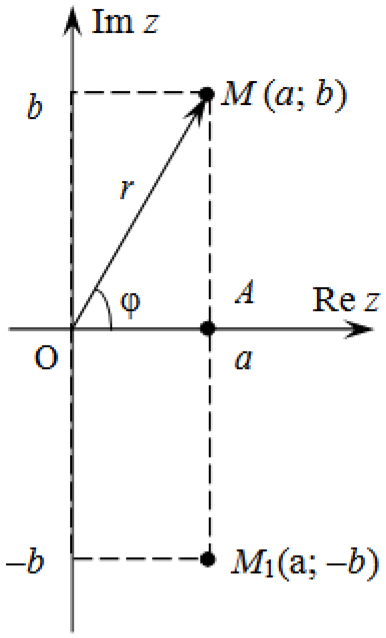
Комплексное число – это упорядоченная пара действительных чисел a и b. Каждой упорядоченной паре действительных чисел, то есть каждому комплексному числу, отвечает определенная точка на плоскости. Плоскость xOy, используемая для изображения комплексных чисел, называется *комплексной числовой плоскостью* и обозначается символом C. Буква O обозначает начало системы координат. Положение точки O отвечает нулевой отметке на осях координат Ox и Oy.

Пусть точка $M(a;b)$ - любая точка на комплексной плоскости. Эта точка является геометрической интерпретацией комплексного числа $z=(a;b)$ и $z=a+bi$. На комплексной плоскости символы z и $(a;b)$ означают одно и то же. Точка $M(a;b)$ называется *аффиксом* комплексного числа $z=a+bi$, а комплексное число z называется *комплексной координатой точки* M.

Следовательно, между точками комплексной плоскости и множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Частными случаями комплексных чисел $z = a + bi$ являются действительные числа $z = a$, если $b = 0$ и мнимые числа $z = bi$, если $a = 0$. Это значит, что множество действительных чисел a и множество мнимых чисел bi являются частными случаями множества комплексных чисел. Поскольку геометрической интерпретацией действительных чисел является множество точек $(a;0)$, то действительные числа изображаются точками на оси Ox, которая на комплексной числовой плоскости называется *действительной осью* Ox или $\operatorname{Re} z$. Геометрической интерпретацией мнимых чисел является множество точек $(0;b)$. Следовательно, мнимые числа изображаются точками на оси Oy, которая на комплексной числовой плоскости называется *мнимой осью* и обозначается Oy или $\operatorname{Im} z$ (рис. 1.1).

Рисунок 1.1 Геометрическое изображение комплексных чилел



Каждой точке $M(a;b)$ на комплексной числовой плоскости отвечает ее *радиус-вектор* $\overrightarrow{OM}$. Выходит, что множество комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех радиус-векторов на комплексной числовой плоскости. При этом, если комплексное число $z = a + bi$ является *комплексной координатой точки* $M(a;b)$, то комплексное число $z = a + bi$ называется *комплексной координатой радиус-вектора точки* $M(a;b)$, а сам вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *комплексным вектором*. Следовательно, комплексная координата радиус-вектора точки равняется комплексной координате этой точки.

Обратимся к рисунку 1.1. Рассмотрим прямоугольный треугольник OAM. В этом треугольнике $|OA| = a,\ |MA| = b$. Найдем гипотенузу $|OM|$: $|OM| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Выходит, что: 1) проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на действительную и мнимую оси равняются соответственно действительной и мнимой частям

комплексной координаты этого вектора, то есть $np_{\mathrm{Re}z}\overrightarrow{OM}=a$, $np_{\mathrm{Im}z}\overrightarrow{OM}=b$.
2) Модуль радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадает с модулем комплексного числа z, то есть $\left|\overrightarrow{OM}\right|=|z|=r$.

Следовательно, модуль комплексного числа равняется расстоянию от точки $O(0;0)$ комплексной числовой плоскости до аффикса комплексного числа.

Если некоторый вектор $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ равняется комплексному вектору $\overrightarrow{OM}=\{a;b\}$, то вектор $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ также называется *комплексным вектором с комплексной координатой* $z=a+bi$.

<u>*Аргумент комплексного числа.*</u>

Определение: Аргументом комплексного числа $z=a+bi$ $(z\neq 0)$ называется угол φ между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором комплексного числа z.

Аргумент комплексного числа называется положительным, если угол отсчитывается от оси Ox в направлении против часовой стрелки, и отрицательным, если угол отсчитывается от оси Ox в направлении по часовой стрелке.

Для обозначения аргумента используется символ $\varphi=Argz$. (1.5)

У каждого комплексного числа существует бесконечное множество аргументов, которые отличаются между собой на число $2\Pi\mathrm{n}$, где $n\in Z$.

Определение: Главным значением аргумента комплексного числа называется тот из аргументов, который удовлетворяет условию

$$-\Pi<\varphi\leq\Pi. \quad (1.6)$$

Замечание: Наравне с предположением $-\Pi<\varphi\leq\Pi$, существует и предположение $0\leq\varphi<2\Pi$. (1.7)

Для обозначения главного аргумента используется символ $\varphi=\arg z$ (1.8)

У каждого комплексного числа существует одно главное значение аргумента. Исключение составляет лишь число $0+0i$, аргумент которого является неопределенным.

Аргументы комплексно-сопряженных чисел являются противоположными числами: $\arg z=-\arg\bar{z}$. (1.9)

Для нахождения аргумента комплексного числа удобно пользоваться формулами:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{b}{a}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{I} \text{ четверти} \\ \Pi + \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{II} \text{ четверти;} \\ -\Pi + \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{III} \text{ четверти;} \\ \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{IV} \text{ четверти;} \\ \Pi, \text{ если } \mathrm{a} < 0, \mathrm{b} = 0; \\ 0, \text{ если } \mathrm{a} > 0, \mathrm{b} = 0; \\ \frac{\Pi}{2}, \textit{если } \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} > 0; \\ -\frac{\Pi}{2}, \textit{если } \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} < 0. \end{cases} \qquad (1.10)$$

если аргумент удовлетворяет условию (1.6)
или

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{b}{a}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{I} \text{ четверти} \\ \Pi + \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{II} \text{ четверти;} \\ \Pi + \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{III} \text{ четверти;} \\ 2\Pi - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}, \textit{если } \mathrm{z} \in \mathrm{IV} \text{ четверти;} \\ \Pi, \text{ если } \mathrm{a} < 0, \mathrm{b} = 0; \\ 0, \text{ если } \mathrm{a} > 0, \mathrm{b} = 0; \\ \frac{\Pi}{2}, \textit{если } \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} > 0; \\ \frac{3\Pi}{2}, \textit{если } \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} < 0. \end{cases} \qquad (1.11)$$

если аргумент удовлетворяет условию (1.7).

Аргумент комплексного числа можно также отыскать, исходя из следующих рассуждений: обратимся к рисунку 1.1. Очевидно, что $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$; $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$. Анализируя знаки $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, находим такое значение φ, которое принадлежит соответствующей четверти.

Примеры.

Пример 1.1.: преобразовать заданные выражения, пользуясь понятием мнимой единицы:

а) $\sqrt{-16}$; б) $\sqrt{-25}$; в) $5-\sqrt{-64}$; г) $\sqrt{6}+\sqrt{-9}$.

Решение:

а) $\sqrt{-16} = \sqrt{-1\cdot 16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = \pm 4i$;

б) $\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1}\sqrt{25} = \pm 5i$;
в) $5 - \sqrt{-64} = 5 - \sqrt{-1 \cdot 64} = 5 - \sqrt{-1}\sqrt{64} = 5 - (\pm 8i) = 5 \pm 8i$;
г) $\sqrt{6} + \sqrt{-9} = \sqrt{6} + \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{6} + \sqrt{-1}\sqrt{9} = \sqrt{6} + \sqrt{9}i = \sqrt{6} \pm 3i$.
Ответ: а) $\pm 4i$; б) $\pm 5i$; в) $5 \pm 8i$; г) $\sqrt{6} \pm 3i$.

<u>Пример 1.2.:</u> Найти значение выражения $A = 4i^{17} + 8i$.
Решение:

$A = 4i^{17} + 8i = 4i^{16+1} + 8i = 4i^{16} \cdot i + 8i = 4(i^4)^4 i + 8i = 4i + 8i = 12i$.

Ответ: $12i$.

<u>Пример 1.3.:</u> Для заданных чисел $z_1 = 3$; $z_2 = -3i$; $z_3 = 4 - 5i$; $z_4 - 5 + 6i$ найти числа: а) комплексно-сопряженные; б) противоположные.
Решение:
Запишем решение в виде таблицы

z	Комплексно-сопряженное число	Противоположное число
$z_1 = 3$	3	-3
$z_2 = -3i$	$3i$	$3i$
$z_3 = 4 - 5i$	$4 + 5i$	$-4 + 5i$
$z_4 = -5 + 6i$	$-5 - 6i$	$5 - 6$

<u>Пример 1.4.:</u> Решить уравнение: $(1+i)x + (-2+5i)y = -4 + 17i$.
Решение:
В заданном уравнении раскроем скобки: $x + xi - 2y + 5yi = -4 + 17i$.
Исходя из того, что комплексные числа являются равными между собой, если равны их действительные и равны мнимые части, запишем последнее равенство так, чтобы и левая и правая части были представлены в виде суммы действительной и мнимой частей комплексного числа.

$$(x - 2y) + (x + 5y)i = -4 + 17i.$$

Опираясь на условие равенства двух комплексных чисел, получим систему уравнений: $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$.
От второго уравнения системы вычтем первое уравнение, тогда

$$7y = 21$$
$$y = 3$$

Подставим $y = 3$ в первое уравнение системы:

$$x = -4 + 2 \cdot 3$$
$$x = -4 + 6$$
$$x = 2$$

Ответ: $(2;3)$.

Замечание: Понятие равенства двух комплексных чисел дает возможность решать одно уравнение с двумя неизвестными.

<u>Пример 1.5.:</u> Найти действительные числа x и y из уравнения $9 + 2xi + 4yi = 10i + 5x - 6y$.
Решение:

Заданное уравнение можно рассматривать как равенство двух комплексных чисел: $9+(2x+4y)i=(5x-6y)+10i$. Исходя из определения равенства комплексных чисел, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}5x-6y=9\\2x+4y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-6y=9\\x+2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\5(5-2y)-6y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\25-10y-6y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\16y=16\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2\cdot 1\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$$

Ответ: $(3;1)$.

<u>Пример 1.6.:</u> Решить квадратное уравнение: $z^2-10z+34=0$.

Решение:

$D=b^2-4ac=100-4\cdot 1\cdot 34=100-136=-36$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 6i}{2}$$

$z_1=5-3i$

$z_2=5+3i$

Ответ: $z_1=5-3i$; $z_2=5+3i$.

Замечание: Следует обратить внимание на то, что на множестве комплексных чисел квадратное уравнение с действительными коэффициентами всегда имеет два корня. Если дискриминант $D>0$, то корнями являются действительные разные числа; если $D=0$, то корнями являются действительные равные числа; если $D<0$, то корнями являются комплексно-сопряженные числа.

<u>Пример 1.7.:</u> Решить уравнение: $x^2+1=0$ а) на множестве действительных чисел; б) на множестве комплексных чисел.

Решение:

а) $x^2+1=0$

$x^2=-1$

Ответ: решений нет.

б) $x^2+1=0$

$x^2=-1$

$x=\pm i$

Ответ: $i;-i$

<u>Пример 1.8.:</u> Изобразить точками на комплексной плоскости числа:

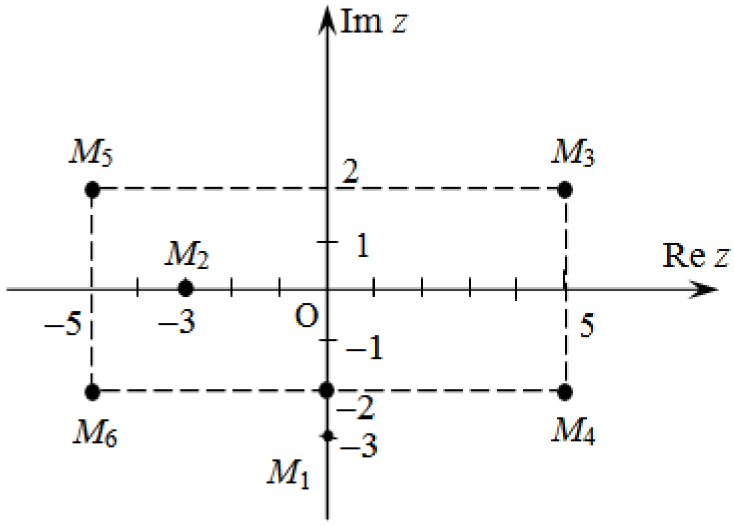
$z_1=-3i$; $z_2=-3$; $z_3=5+2i$; $z_4=5-2i$; $z_5=-5+2i$; $z_6=-5-2i$.

Решение:

Следует учесть, что числу $z_1=-3i$ отвечает точка $M_1(0;-3)$, а числу $z_2=-3$ - точка $M_2(-3;0)$, числу $z_3=5+2i$ - точка $M_3(5;2)$, числу $z_4=5-2i$ - точка $M_4(5;-2)$, числу $z_5=-5+2i$ - точка $M_5(-5;2)$, числу $z_6=-5-2i$ - точка $M_6(-5;-2)$.

На комплексной плоскости изобразим заданные комплексные числа (рис.1.2).

Рисунок 1.2



2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

<u>*Алгебраическая форма комплексного числа*</u>.

Комплексное число, заданное в виде $z = a + bi$, называется *комплексным числом в алгебраической форме.*

<u>*Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме:*</u>

- чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные и мнимые части.

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i$

- произведением комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + adi + cbi - bd =$ $= (ac - bd) + (ad + cb)i$.

- при вычитании комплексных чисел, вычитаются их действительные и мнимые части.

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = (a - c) + (bi - di) = (a - c) + (b - d)i$

- при делении комплексных чисел, числитель и знаменатель дроби нужно домножить на комплексное число, сопряженное знаменателю.

Два комплексных числа называются сопряженными, ели они отличаются знаком мнимой части. $z = a + bi \Rightarrow z = a - bi$. Обозначение: $\bar{z}$.

Примеры:

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$, если $z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = -1 + i$

Решение:

$z_1 + z_2 = (2 - 2i) + (-1 + i) = (2 + (-1)) + (-2i + 1i) = (2 - 1) + (-2 + 1)i =$

$= 1 - 1i = 1 - i$

Ответ: $1 - i$

2) $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 4 - 3i$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)\cdot(4-3i) = 12 - 9i + 8i - 6i^2 = 12 - i + 6 = 18 - i$$

Ответ: $18 - i$

3) $z_1 - z_2$, если $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 - i$

Решение:

$$z_2 - z_1 = (3-i) - (-2+i) = (3-(-2)) + (-1i - 1i) = (3+2) + (-1-1)i =$$
$$= 5 - 2i$$

Ответ: $5 - 2i$

4) $\dfrac{z_2}{z_1}$, если $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 - i$

Решение:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3-i}{-2+i} = \frac{(3-i)\cdot(-2-i)}{(-2+i)\cdot(-2-i)} = \frac{-6-3i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{-6-i-1}{4-(-1)} = \frac{-7-i}{5} =$$
$$= \frac{-7}{5} - \frac{i}{5} = -1\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

Ответ: $-1\dfrac{2}{5} - \dfrac{i}{5}$

5) $\dfrac{8}{i^5}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Решение:

$$\frac{8}{i^5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{8}{i}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2\right) = \frac{8i}{i^2}\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -8i(-1) = 8i$$

Ответ: $8i$.

6) $\dfrac{(1+2i)^2}{2+i} + \dfrac{13+12i}{6i-8}$

Решение:

$$\frac{(1+2i)^2}{2+i} + \frac{13+12i}{6i-8} = \frac{1+4i+4i^2}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} + \frac{13+12i}{2(3i-4)}\cdot\frac{(-3i-4)}{(-3i-4)} =$$
$$= \frac{(1+4i-4)(2-i)}{4-i^2} + \frac{-39i-52-36i^2-48i}{2(-9i^2+16)} = \frac{(-3+4i)(2-i)}{4+1} + \frac{-52+36-87i}{2(16+9)} =$$
$$= \frac{-6+8i+3i-4i^2}{5} + \frac{-16-87i}{50} = \frac{-6+4+11i}{5} + \frac{-16-87i}{50} = \frac{-2+11i}{5} + \frac{-16-87i}{50} =$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i - \frac{16}{50} - \frac{87}{50}i = -\frac{18}{25} + \frac{23}{50}i$$

Ответ: $-\dfrac{18}{25} + \dfrac{23}{50}i$.

7) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$

Решение:

$$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2+2i^2}{2}=\frac{2-2}{2}=0$$

Ответ: 0.

8) $\dfrac{(1-i)^3-(1+2i)^2}{(2+i)^2-(3+2i)^3}$

Решение:

$$\frac{(1-i)^3-(1+2i)^2}{(2+i)^2-(3+2i)^3}=\frac{1-3i+3i^2-i^3-1-4i-4i^2}{4+4i+i^2-27-54i-36i^2-8i^3}=\frac{-7i-3+i+4}{-23-50i-1+36+8i}=$$

$$=\frac{1-6i}{12-42i}=\frac{1-6i}{6(2-7i)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-6i}{2-7i}\cdot\frac{2+7i}{2+7i}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2-12i+7i-42i^2}{4-49i^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2-5i+42}{4+49}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{44-5i}{53}=\frac{44}{6\cdot 53}-\frac{5}{6\cdot 53}i=\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$$

Ответ: $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$.

9) найти z^{10}, если $z=1-i$

Решение:

$$(1-i)^{10}=\left((1-i)^2\right)^5=\left(1-2i+i^2\right)^5=(1-2i-1)^5=(-2i)^5=-32i^5=-32i$$

Ответ: $-32i$.

3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Рассмотрим комплексное число $z=a+bi$. Обратимся к рисунку 1.1. Из прямоугольного треугольника OAM выходит, что $a=OA$; $b=AM$ или

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi \\ b=r\sin\varphi \end{cases} \qquad (3.1)$$

В результате этого, комплексное число $z=a+bi$ можно представить в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (3.2)

Комплексное число, заданное в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, называется комплексным числом в *тригонометрической форме.*

Определение: Два комплексных числа $z_1=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ называются *равными,* если модули этих чисел равны между собой. А их аргументы либо равны между собой, либо отличаются на число, кратное 2Π, то есть $r_1=r_2$ и $\varphi_1=\varphi_2+2\Pi n$, где $n\in Z$.

Над комплексными числами в тригонометрической форме удобно выполнять такие алгебраические действия, как умножение, возведение в степень, деление, извлечение корня степени n.

Умножение комплексных чисел.

Теорема: Произведением двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, является такое комплексное число, модуль которого равняется произведению модулей сомножителей, а аргумент равняется сумме аргументов сомножителей.

Доказательство:

Пусть $z_1 = r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Следовательно, доказана формула

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (3.3)$$

Возведение в степень комплексных чисел. Первая формула Муавра.

Определение: Произведение n равных между собой комплексных чисел z называется $n-ой$ *степенью комплексного числа* и обозначается символом z^n, где $n \in N$.

Теорема: Если комплексное число z задано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для любого целого числа n справедлива формула

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \text{где } n \in Z. \quad (3.4)$$

Замечание: 1) Формула (3.4) справедлива, как для положительных, так и для отрицательных n. 2) Поскольку считают, что $z^0 = 1$, то формула (3.4) является справедливой для любого целого числа $n \in Z$. 3) Формула (3.4) называется *первой формулой Муавра.*

Деление комплексных чисел.

Теорема: Частным двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, является такое комплексное число, модуль которого равняется частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя при условии, что заданные числа отличаются от нуля. То есть, если $z_1 = r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то справедлива формула:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi 1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (3.5)$$

Извлечение корня из комплексного числа. Вторая формула Муавра.

Теорема: Любое комплексное число, заданное в тригонометрической форме и отличное от нуля, имеет n значений корня $n-ой$ степени, определяемых по формуле $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\Pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\Pi k}{n}\right)$ (3.6), где $n \in N$; $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Формула (3.6) называется *второй формулой Муавра*.

В соответствии с формулой (3.6), корень степени n из комплексного числа имеет ровно n значений. Каждое из них имеет один и тот же модуль r, а это значит, что все комплексные числа, равные значениям $\sqrt[n]{z}$, размещаются на окружности радиуса r с центром в точке $O(0;0)$. Аргументы этих комплексных чисел при $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ отличаются на величину $\frac{2\Pi}{n}k$, а любые два соседних значения аргументов отличаются на $\frac{2\Pi}{n}$. Получается, что, если все значения $\sqrt[n]{z}$ разместить на окружности радиуса r с центром в точке $O(0;0)$, то расстояние между соседними аффиксами будет одинаковым. А если построить замкнутую ломаную с вершинами в этих точках, то получим правильный n-угольник.

Примеры.

Пример 3.1.: Записать в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = 5-5i$ и $z_2 = \sqrt{3}+i$. Найти значение выражения $z = \frac{z_1^2}{z_2^3}$.

Решение:

Число $z_1 \in IV$ четверти.

$$|z_1| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\arg z_1 = arctg(-1) = -arctg1 = -\frac{\Pi}{4}.$$

Число $z_2 \in I$ четверти.

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg z_2 = \arg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\Pi}{6}.$$

$$z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\Pi}{6}+i\sin\frac{\Pi}{6}\right).$$

Воспользуемся первой формулой Муавра

$$z_1^2 = (5\sqrt{2})^2\left(\cos 2\left(-\frac{\Pi}{4}\right)+i\sin 2\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right) = 50\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\Pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3\Pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\Pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\Pi}{2}+i\sin\frac{\Pi}{2}\right).$$

По формуле $\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi 1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$ найдем $z = \frac{z_1^2}{z_2^3}$.

$$z = \frac{z_1^2}{z_2^3} = \frac{50\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\Pi}{2}\right)\right)}{8\left(\cos\frac{\Pi}{2}+i\sin\frac{\Pi}{2}\right)} = \frac{25}{4}\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{2}-\frac{\Pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\Pi}{2}-\frac{\Pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{25}{4}(\cos(-\Pi)+i\sin(-\Pi))$$

Полученный результат нельзя считать комплексным числом в стандартной форме, поскольку аргумент этого числа не удовлетворяет условию $-\Pi < \varphi \le \Pi$. Поэтому число z можно задать таким образом:

$$z = \frac{25}{4}\left(\cos(-\Pi) + i\sin(-\Pi)\right) = \frac{25}{4}\left(\cos(-\Pi + 2\Pi) + i\sin(-\Pi + 2\Pi)\right) = \frac{25}{4}\left(\cos \Pi + i\sin \Pi\right)$$

Ответ: $\frac{25}{4}\left(\cos \Pi + i\sin \Pi\right)$.

<u>Пример 3.2.:</u> Выполнить действия и записать ответ в тригонометрической форме $z = 10\left(\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{4+2i}\right)$.

Решение: Сначала выполним действия:

$$z = 10\left(\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{4+2i}\right) = 10\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2} + \frac{4-4i-2i+2i^2}{16-4i^2}\right) = 10\left(\frac{1+3i}{5} + \frac{2-6i}{20}\right) =$$

$$= 10\,\frac{4+12i+2-6i}{20} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i.$$

Теперь запишем число в тригонометрической и показательной формах, для чего найдем его модуль и аргумент

$$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = \alpha = arctg\left|\frac{3}{3}\right| = arctg 1 = \frac{\Pi}{4}.$$

Тогда:

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}\right)$$ - тригонометрическая форма.

Ответ: $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}\right)$.

<u>Пример 3.3:</u>

Дано: $z_1 = \cos\frac{\Pi}{8} + i\sin\frac{\Pi}{8}$;

$z_2 = \cos\frac{\Pi}{12} + i\sin\frac{\Pi}{12}$;

$z_3 = \cos\frac{\Pi}{24} + i\sin\frac{\Pi}{24}$.

Найти:

1) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$;

2) $\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$;

3) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$;

4) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$.

Решение:

1)
$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \cos\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{12}+\frac{\Pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{12}+\frac{\Pi}{24}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\Pi}{24}+\frac{3\Pi}{24}+\frac{2\Pi}{24}\right)+i\left(\sin\left(\frac{3\Pi}{24}+\frac{2\Pi}{24}+\frac{\Pi}{24}\right)\right)=\cos\frac{6\Pi}{24}+i\sin\frac{6\Pi}{24}=\cos\frac{\Pi}{4}+i\sin\frac{\Pi}{4}$$

2)
$$\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}=\cos\left(\frac{\Pi}{8}-\left(\frac{\Pi}{12}+\frac{\Pi}{24}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\Pi}{8}-\left(\frac{\Pi}{12}+\frac{\Pi}{24}\right)\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{3\Pi}{24}-\left(\frac{2\Pi}{24}+\frac{\Pi}{24}\right)\right)+i\sin\left(\frac{3\Pi}{24}-\left(\frac{2\Pi}{24}+\frac{\Pi}{24}\right)\right)=\cos 0+i\sin 0=1+i\cdot 0=1$$

3)
$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}=\cos\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{12}-\frac{\Pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{12}-\frac{\Pi}{24}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{3\Pi}{24}+\frac{2\Pi}{24}-\frac{\Pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{3\Pi}{24}+\frac{2\Pi}{24}-\frac{\Pi}{24}\right)=\cos\frac{4\Pi}{24}+i\sin\frac{4\Pi}{24}=\cos\frac{\Pi}{6}+i\sin\frac{\Pi}{6}$$

4)
$$\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}=\cos\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{24}-\frac{\Pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\Pi}{8}+\frac{\Pi}{24}-\frac{\Pi}{12}\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{3\Pi}{24}+\frac{\Pi}{24}-\frac{2\Pi}{24}\right)+\mathrm{isin}\left(\frac{3\Pi}{24}+\frac{\Pi}{24}-\frac{2\Pi}{24}\right)=\cos\frac{2\Pi}{24}+i\sin\frac{2\Pi}{24}=\cos\frac{\Pi}{12}+i\sin\frac{\Pi}{12}$$

Ответ: 1) $\cos\frac{\Pi}{4}+i\sin\frac{\Pi}{4}$; 2) 1; 3) $\cos\frac{\Pi}{6}+i\sin\frac{\Pi}{6}$; 4) $\cos\frac{\Pi}{12}+i\sin\frac{\Pi}{12}$.

4. Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

Показательная форма комплексного числа.

Весьма часто в математике и ее приложениях применяется выражение $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Для этого выражения используется сокращенное обозначение $e^{i\varphi}$ или $\exp i\varphi$, что называется мнимой экспонентой. При этом имеет место равенство $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ (4.1).

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда комплексное число z можно записать в форме $z=re^{i\varphi}$. (4.2)

Число заданное в виде $z=re^{i\varphi}$, называется *комплексным числом в показательной форме*.

Определение: два комплексных числа $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ называются *равными* между собой, если их модули равны между собой, их аргументы либо равны между собой, либо отличаются на число, кратное 2Π, то есть $r_1=r_2$ и $\varphi_1=\varphi_2+2\Pi n$, где $n\in Z$.

Над комплексными числами в показательной форме удобно выполнять такие алгебраические действия, как умножение, возведение в степень, деление, извлечение корня.

Умножение комплексных чисел.

Теорема: Произведением двух комплексных чисел, заданных в показательной форме, является такое комплексное число, модуль которого равняется произведению модулей сомножителей, а аргумент равняется сумме аргументов сомножителей. То есть, если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (4.3)$$

Возведение в степень комплексных чисел.

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Найдем z^n, где $n \in N$.

$z^n = \left(ze^{i\varphi}\right)^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n$.

Опираясь на первую формулу Муавра, получаем $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi) = r^n e^{in\varphi}$,

Откуда $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$. (4.4) Получена первая формула Муавра в показательной форме.

Деление комплексных чисел.

Теорема: Частным двух комплексных чисел, заданных в показательной форме, является такое комплексное число, модуль которого равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя при условии, что заданные числа отличаются от нуля. То есть, если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то справедлива формула: $\dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ (4.5).

Извлечение корня из комплексного числа.

Теорема: Любое комплексное число, заданное в тригонометрической форме и отличное от нуля, имеет n значений корня $n-ой$ степени, определяемых по формуле $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi + 2\Pi k)}{n}}$ (4.6), где $n \in N$; $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Получена *вторая формула Муавра* в показательной форме.

Формулы Эйлера.

Равенство $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ называется *формулой Эйлера*. На основании этой формулы можно получить еще несколько важных формул.

Например, если в равенстве $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ аргумент φ заменить на $-\varphi$, то придем к равенству $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ (4.7), которое также называется формулой Эйлера. Если равенства $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ почленно сложить, то получим $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$ (4.8). Аналогично, почленно вычитая равенство $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ от равенства $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получим $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$ (4.9). Так как $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2i^2} = -\dfrac{i}{2}$, то $\sin\varphi = -\dfrac{i}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$ или $\sin\varphi = \dfrac{i}{2}\left(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}\right)$ (4.10).

Примеры.

Пример 4.1.: Записать в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z=-\sqrt{3}-i$ и построить соответствующий комплексный вектор.

Решение:

Так как комплексное число $z=-\sqrt{3}-i$ задано в алгебраической форме, то $a=\sqrt{3}$; $b=-1$. Для того, чтобы комплексное число записать в тригонометрической или показательной форме, нужно найти модуль и аргумент комплексного числа.

$|z|=r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$.

Число $z\in III$ четверти, то

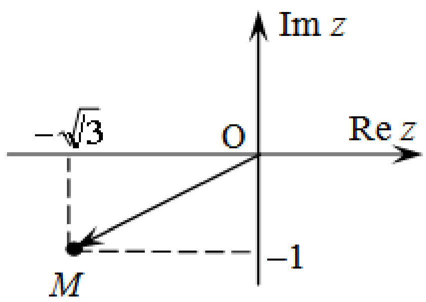
$$\arg z=-\varPi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)=-\varPi+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\varPi+\frac{\Pi}{6}=-\frac{5\varPi}{6}.$$

Тогда:

$z=2\left(\cos\left(-\frac{5\varPi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\varPi}{6}\right)\right)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа $z=-\sqrt{3}-i$

$z=2e^{-i\frac{5\varPi}{6}}$ - показательная форма записи комплексного числа $z=-\sqrt{3}-i$

Построим комплексный вектор, соответствующий заданному комплексному числу. Точка $M\left(-\sqrt{3};-1\right)$ является аффиксом комплексного числа z, а вектор $\overrightarrow{OM}$ - его комплексным вектором



Ответ: $z=2\left(\cos\left(-\frac{5\varPi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\varPi}{6}\right)\right)$; $z=2e^{-i\frac{5\varPi}{6}}$.

Пример 4.2.: Выполнить действия и записать ответ в показательной форме $z=10\left(\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{4+2i}\right)$.

Решение: Сначала выполним действия:

$$z=10\left(\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{4+2i}\right)=10\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}\right)=$$

$$=10\left(\frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2}+\frac{4-4i-2i+2i^2}{16-4i^2}\right)=10\left(\frac{1+3i}{5}+\frac{2-6i}{20}\right)=$$

$$=10\frac{4+12i+2-6i}{20}=\frac{6+6i}{2}=3+3i.$$

Теперь запишем число в показательной формах, для чего найдем его модуль и аргумент

$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

$\varphi = \alpha = arctg\left|\frac{3}{3}\right| = arctg1 = \frac{\Pi}{4}$.

Тогда:

$z = 3\sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}$ - показательная форма.

Ответ: $z = 3\sqrt{2}e^{\frac{\Pi}{4}i}$.

Пример 4.3.:

Дано:

$z_1 = -4 - 4i$

$z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$

Найти:

1) $z_1 \cdot z_2$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

Действия выполнить в показательной форме.

Решение:

$z_1 = -4 - 4i$

$a_1 = -4;\ b_1 = -4$

$|z_1| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$z_1 \in III$ четверти $\Rightarrow \varphi_1 = \arg z_1 = -\Pi + \mathrm{arctg}1 = -\Pi + \frac{\Pi}{4} = -\frac{3\Pi}{4}$

$z_1 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\Pi}{4}}$ - показательная форма записи $z_1 = -4 - 4i$

$z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$

$a_2 = 3;\ b_2 = -3\sqrt{3}$

$|z_2| = \sqrt{3^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = 6$

$z_2 \in IV$ четверти $\Rightarrow \varphi_2 = \arg z_2 = arctg\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\Pi}{3}$

$z_2 = 6e^{-i\frac{\Pi}{3}}$ - показательная форма записи $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$

1) $$z_1 \cdot z_2 = \left(4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\Pi}{4}}\right)\left(6e^{-i\frac{\Pi}{3}}\right) = 4\sqrt{2} \cdot 6e^{-i\frac{3\Pi}{4} - i\frac{\Pi}{3}} = 24\sqrt{2}e^{-i\frac{13\Pi}{12}} =$$
$$= 24\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\Pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{13\Pi}{12}\right)\right) = 24\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\Pi}{12} + i\sin\frac{11\Pi}{12}\right) = 24\sqrt{2}e^{i\frac{11\Pi}{12}}$$

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\Pi}{4}}}{6e^{-i\frac{\Pi}{3}}} = \frac{4\sqrt{2}}{6}e^{i\left(-\frac{3\Pi}{4} + \frac{\Pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{5\Pi}{12}}$$

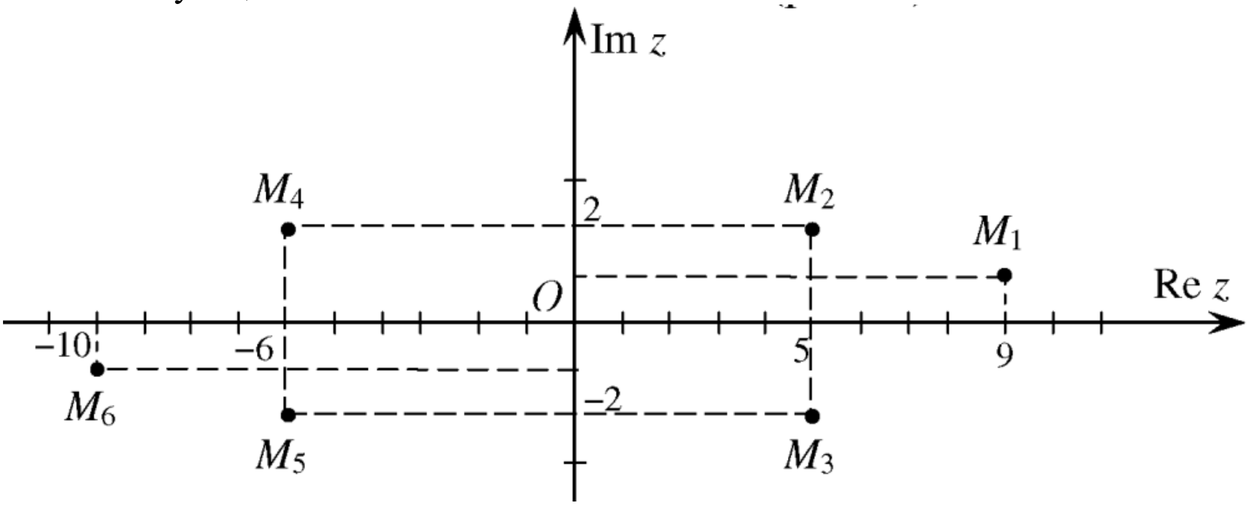
Ответ: 1) $24\sqrt{2}e^{i\frac{11\Pi}{12}}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{5\Pi}{12}}$.

5. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1: Изобразить точками на комплексной плоскости такие числа:

1) $z_1 = 2 + i$; 4) $z_4 = -3 - 2i$; 7) $z_7 = 7$;
2) $z_2 = 2 - i$; 5) $z_5 = 5i$; 8) $z_8 = -3i$.
3) $z_3 = -2 + 3i$; 6) $z_6 = 5$;

Задача 2: Записать в алгебраической форме комплексные числа, соответствующие точкам на комплексной плоскости.



Задача 3: Для заданных чисел:
1

а) 3; б) $\sqrt{2}$; в) $-4i$; г) $2-3i$; д) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ назвать: 1) противоположное число; 2) комплексно-сопряженное число.

Задача 4: Выполнить сложение комплексных чисел в алгебраической форме:

1. $(5+4i)+(3-7i)$;
2. $(2-8i)+(5-i)$;
3. $(2+5i)(-2-2i)$;
4. $(4+3i)+(-4+3i)$;
5. $(2-4i)+(-2+4i)$.

Задача 5: Выполнить действия над комплексными числами:

1. $(0{,}5-3{,}2i)+(1{,}5-08i)+(1-4i)$;
2. $2+(3+4i)+2i+(-6-7i)$;
3. $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{3}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$;
4. $(0{,}12-1{,}4i)+(1{,}08+0{,}4i)+(2{,}5-0{,}2i)$.

Задача 6: Определить разность комплексных чисел:

1. $(5+3i)-(2+i)$;
2. $(-2+4i)-(2+i)$;
3. $(1+i)-(5+3i)$;
4. $(2-3i)-(2+3i)$.

Задача 7: Выполнить умножение комплексных чисел в алгебраической форме:

1. $2i \cdot 3i$;
2. $4i \cdot 2\sqrt{2}i$;
3. $5i(-4i)$;
4. $2{,}5i \cdot 4i$;
5. $(3+5i)\cdot 2$;
6. $(1-i)(-4)$;
7. $(-2-3i)\cdot 5$;
8. $(-3+4i)\cdot 2i$.

Задача 8: Выполнить умножение комплексных чисел:

1. $(2-3i)(4-i)$;
2. $(1-2i)(5-i)$;
3. $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$;
4. $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$;
5. $(5+i)(5-i)$;
6. $(1-i)(1-i)$;
7. $(-8+7i)(-3i)$;
8. $(1+i)(1-i)$;
9. $(2+3i)(-4+i)$;
10. $(3+5i)(5+3i)$;
11. $i^3(3-2i)$;
12. $(2-3i)(-1-i)(3+4i)$.

Задача 9: Выполнить деление комплексных чисел:

1. $\dfrac{5}{3i}$;
2. $\dfrac{6}{1-2i}$;
3. $\dfrac{4}{1+2i}$;
4. $\dfrac{7-3i}{1+3i}$;
5. $\dfrac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}-2i}$;
6. $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$;
7. $\dfrac{4-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$;
8. $\dfrac{5-2i}{1-2i}$;
9. $\dfrac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}-2i}$;
10. $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}i}{-1+\sqrt{3}i}$;
11. $\dfrac{-3\sqrt{2}+i}{1+3\sqrt{2}i}$.

Задача 10: выполнить действия:

1. $(3+4i)+5(2-3i)-3(2-7i)$;
2. $(9+16i)(8-3i)+7(12-5i)$;
3. $(9+5i)(4-3i)+(6-i)(6+i)$;
4. $(3-7i)(5+6i)-(9-8i)(3+12i)$;
5. $\dfrac{11-8i}{2+3i}-(4+8i)(2-7i)$;
6. $\dfrac{12-5i}{12+5i}-\dfrac{4-i}{5+i}\cdot(8-i)(8+i)$;
7. $\dfrac{7-i}{3+i}\cdot\dfrac{1+i}{1-i}$;
8. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\cdot\dfrac{42+2i}{3+5i}$;
9. $\left(\dfrac{7-2i}{7+2i}\right)\cdot\dfrac{1+3i}{4-i}$;
10. $\left(\dfrac{2-5i}{4+i}\right)\left(\dfrac{6-7i}{4-i}\right)$.

Задача 11: Найти значения выражений (в алгебраической форме):

1. $(i(2-i))^2$;
2. $(2i(3-4i))^2$;
3. $((3i-5)2i)^2$;
4. $((5-i)(5+i))^2$;
5. $((6-2i)(6+2i))^2(1+i)^2$;
6. $(3+i)^2(1-i)^3$;
7. $(1+i)^4$;
8. $(1-i)^4$;
9. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
10. $(1+i)^3$;
11. $(2-\sqrt{3}i)^3$;
12. $(3-i\sqrt{3})^3$.

Задача 12: Найти действительные числа x и y из условия равенства комплексных чисел:

1. $9+2xi+4yi=10i+5x-6y$;
2. $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;
3. $(1+i)x+(1-i)y=3-i$;
4. $(4-i)x+(2+5i)y=8+9i$;
5. $(3+i)x-(1-2i)y=7$;
6. $2ix+3iy+17=3x+2y+18i$;
7. $5i-2y+(x+y)i=4+5i$.

Задача 13: Решить уравнение:

1. $z^2+16=0$;

2. $z^2 - 2z + 2 = 0$;
3. $z^2 + 2 = 0$;
4. $4z^2 + 4z + 5 = 0$.

Задача 14: Решить уравнение:

1. $3z^2 + 5 = 0$;
2. $z^2 - 14z + 74 = 0$;
3. $z^2 + 2z + 5 = 0$;
4. $4z^2 - 2z + 1 = 0$;
5. $z^2 + 18z + 81 = 0$;
6. $z^2 + 4z + 3 = 0$.

Задача 15: Представить заданные числа в тригонометрической и показательной формах:

1. $z = 3i$;
2. $z = -1 + i$;
3. $z = 1 - i\sqrt{3}$;
4. $z = \sqrt{3} - i$;
5. $z = -3 + 4i$;
6. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;
7. $z = 5 - 12i$;
8. $z = -4 - 3i$;
9. $z = i$;
10. $z = -5$;
11. $z = 1 + i$;
12. $z = 6 - 6i$;
13. $z = -\sqrt{3} + i$;
14. $z = -2 - 2\sqrt{3}i$;
15. $z = -3 + 2i$.

Задача 16: Представить в алгебраической форме комплексные числа:

1. $2\left(\cos\frac{\Pi}{6} + i\sin\frac{\Pi}{6}\right)$;
2. $5(\cos 0 + i\sin 0)$;
3. $3\left(\cos\frac{3\Pi}{2} + i\sin\frac{3\Pi}{2}\right)$;
4. $\cos 60^0 + i\sin 60^0$;
5. $7e^{\frac{\Pi}{3}i}$;
6. $9e^{\frac{\Pi}{4}i}$;
7. $16e^{-\frac{\Pi}{4}i}$.

Задача 17: Найти произведение комплексных чисел и записать ответ в показательной форме:

1. $2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)\cdot 3(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$;
2. $\sqrt{2}(\cos 30^0 + i\sin 30^0)\cdot 2\sqrt{2}(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$;
3. $3\left(\cos\frac{\Pi}{6} + i\sin\frac{\Pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\Pi}{3} + i\sin\frac{\Pi}{3}\right)$;
4. $\sqrt{3}(\cos 120^0 + i\sin 120^0)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$;
5. $\left(\cos\frac{\Pi}{12} + i\sin\frac{\Pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}\right)$;
6. $3\left(\cos\frac{\Pi}{8} + i\sin\frac{\Pi}{8}\right)\left(\cos\frac{5\Pi}{24} + i\sin\frac{5\Pi}{24}\right)$;
7. $2\left(\cos\frac{\Pi}{3} + i\sin\frac{\Pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right)$;
8. $(\cos 50^0 + i\sin 50^0)(\cos 40^0 + i\sin 40^0)$;
9. $\sqrt{2}(\cos 85^0 + i\sin 85^0)\cdot\sqrt{6}(\cos 95^0 + i\sin 95^0)$;
10. $4(\cos 10^0 + i\sin 10^0)\cdot 2(\cos 35^0 + i\sin 35^0)$.

Задача 18: Выполнить умножение комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме:

1. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$;
2. $\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(-2-2\sqrt{3}i\right)$;
3. $(1+i)\left(3+3\sqrt{3}i\right)$;
4. $(5+5i)\left(\cos 15^0+i\sin 15^0\right)$.

Задача 19: Выполнить деление чисел в тригонометрической и показательной форме:

1. $\dfrac{6\left(\cos\frac{П}{2}+i\sin\frac{П}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{П}{6}+i\sin\frac{П}{6}\right)}$;
2. $\dfrac{3\left(\cos\frac{3П}{4}+i\sin\frac{3П}{4}\right)}{\cos\frac{П}{2}+i\sin\frac{П}{2}}$;
3. $\dfrac{\cos 210^0+i\sin 210^0}{\cos 150^0+i\sin 150^0}$;
4. $\dfrac{2\left(\cos\frac{П}{3}+i\sin\frac{П}{3}\right)}{\cos\frac{П}{4}+i\sin\frac{П}{4}}$;
5. $\dfrac{2\left(\cos\left(-\frac{П}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{П}{3}\right)\right)}{\cos\left(-\frac{П}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{П}{6}\right)}$;
6. $\dfrac{8\left(\cos 150^0+i\sin 150^0\right)}{4\left(\cos\left(-120^0\right)+i\sin\left(-120^0\right)\right)}$.

Задача 20: Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной формах:

1. $\dfrac{1+i}{1-2i}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)$;
2. $\dfrac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$;
3. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17}$;
4. $\dfrac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12}$;
5. $\dfrac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i}-\left(1+i\sqrt{3}\right)$;
6. $\dfrac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i)$;
7. $\dfrac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{i\left(\sqrt{3}-i\right)}$;
8. $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}-2i^{19}$;
9. $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{2i^5}$;
10. $\dfrac{(4-i)^2}{i^8}-8\left(2-i^{13}\right)$.

Рекомендуемая литература.

1. Богомолов М.В. Практические занятия по математике. – К.: Высшая школа, 2007г.
2. Выгодский М.Я. справочник по высшей математике. – 4-е изд. – М., 1973г.
3. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2006г., часть 1.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Часть 1. Учебник 10 класс. – 9-е изд. – М.: Мнемозина, 2008г.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-пресс, 2005г.

Методическое пособие
Для студентов 1 курса
Волховского политехнического техникума

Математика

Автор – составитель
преподаватель математики
Калиновская Ольга Владимировна

ГБПОУ ЛО «Волховский политехнический техникум»
г. Волхов, ул. Дзержинского 26